
QU'EST-CE QU'UN CARRÉ ?

Raymond GUINET
Professeur de mathématiques
I.U.F.M. de Grenoble

Lorsque l'on fait référence aux programmes de mathématiques de l'école maternelle et élémentaire, l'enseignement de la géométrie et par là son acquisition passent par un certain nombre d'activités telles que reproduire, décrire, représenter et construire différents objets géométriques. Ces activités sont associées à «l'utilisation d'une syntaxe logiquement articulée» et à l'application de certaines transformations à ces objets, tout ceci selon les niveaux bien entendu.

Après la conduite de telles activités, il est intéressant de se faire une idée de ce que l'élève perçoit, conçoit et retient à propos de certains des objets géométriques qu'il a rencontrés au cours de sa scolarité élémentaire.

Que reste-t-il après quelques mois de cet enseignement et que peut écrire un élève sans s'aider de ses mains, de gestes ou d'un croquis à propos d'objets géométriques, en un mot quelle évaluation peut-on en faire ? D'où l'idée de demander à des élèves ce qu'ils savent d'un objet aussi simple, aussi familier, aussi connu que le carré.

Depuis l'école maternelle, le mot est connu, la figure tracée à main levée à propos d'un dessin quelconque ou à partir de la prise de son empreinte sur une feuille de papier. L'enfant est en mesure dès cet âge de distinguer et de reconnaître un carré parmi différentes formes, de le désigner et la plupart du temps de le nommer. Petit à petit, cet objet et bien d'autres d'ailleurs prennent forme dans son esprit.

A l'école élémentaire, cet objet est repris, revu dans différents contextes et certaines de ses propriétés explicitées. Mais alors, **qu'est-ce qu'un carré ?**

La question est à la fois vague et précise. On peut y répondre en disant que c'est un quadrilatère plan, ou bien un polygone, ou bien un rectangle, ou bien un parallélogramme. Ces affirmations sont justes mais ne suffisent pas à définir le carré, car si on interprète la question dans une acception plus restrictive, on doit en donner une définition, c'est à dire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un objet géométrique soit un carré. C'est d'ailleurs dans ce contexte que la question doit être interprétée lorsque l'on est dans un cours de géométrie.

Qu'écrit Le Petit Robert à ce propos ?

Quadrilatère dont les quatre angles sont droits et les quatre côtés égaux.

Et, ajoute Le Petit Robert, le carré est un rectangle.

Le Larousse Encyclopédique précise :

Quadrilatère plan qui a ses côtés égaux et ses angles droits. Il est rectangle et losange à la fois.

Quant à l'Encyclopédie Alpha :

Quadrilatère plan qui a ses côtés égaux et ses angles égaux. Par conséquent, ses angles sont droits.

Ce qui caractérise ces définitions est la recherche de la précision et de la concision, même si la précision de quadrilatère plan dans la définition du Larousse est inutile. On pourrait ainsi donner plusieurs définitions du carré, par exemple :

Losange ayant un angle droit.

Une telle définition fait référence implicitement à celle du losange qui est un quadrilatère plan ayant ses côtés égaux. Dire que le carré est un losange ne peut pas faire partie du langage courant où le losange fait plutôt penser à une forme bien précise placée dans une position non moins précise. Il fait partie d'un savoir, appelons-le savant, qui se contente de la définition du losange : *quadrilatère plan ayant ses côtés égaux*, ce qui est le cas du carré, bien entendu.

Qu'est-ce qu'un carré ?

Nous avons posé la question à des élèves de CE₂, de CM₁ et de CM₂ (en tout 81 élèves) au mois de février 1994. Aucun enseignement précis sur le carré n'avait encore été donné, ni aucune révision faite à son sujet dans aucune des classes. La même question a été posée à des élèves-professeurs en formation au mois d'octobre 1994, dans les mêmes conditions.

La question volontairement lapidaire n'a été accompagnée d'aucun commentaire. Il n'était pas précisé que nous attendions une définition.

Analysons les réponses que nous obtenons à cette enquête. Aucun élève de CE₂ et de CM₁ ne donne la définition.

Neuf élèves de CE₂ - plus du tiers - donnent des propriétés significatives et neuf autres donnent une propriété correcte mais non pertinente, comme par exemple : *c'est une forme géométrique.*

Six élèves soit le quart de l'effectif, ne donnent aucune propriété significative et donnent comme réponse : *c'est un cube* ou *c'est un carré*, et deux élèves ne donnent aucune réponse.

Au CM₁, neuf élèves également donnent des propriétés significatives du carré comme : *figure qui a 4 côtés égaux*, ou *4 angles droits*, ou *4 angles égaux* ou *c'est un quadrilatère.*

Sept élèves écrivent que *c'est une forme géométrique*. Sept autres essaient de donner des propriétés, mais elles n'ont qu'un rapport lointain avec le carré : *c'est un angle droit*, ou bien *c'est un cube* ou bien encore, *c'est un carré !*

Au CM₂, quatre élèves sur trente-quatre donnent une définition correcte du carré. Dix élèves (le tiers de l'effectif) donnent des propriétés significatives et dix-neuf élèves enfin écrivent qu'il s'agit d'une forme géométrique ou d'une surface plane.

S'il est intéressant de remarquer que quatre élèves donnent une définition exacte du carré, il est difficile d'interpréter cette «perte» de compétence, dix-neuf élèves sur trente-quatre au CM₂ donnant des propriétés banales somme toute. Peut-être est-ce trop banal de dire que le carré a quatre côtés égaux ou quatre angles droits.

Il est clair que l'idée de conditions nécessaires et suffisantes qui caractérisent la définition d'un être mathématique n'est pas et ne peut pas faire l'objet d'enseignement à l'école élémentaire. Il est vrai que la question trop vague sans aucune précision orale ne peut que produire un tel effet.

Posons la même question à des élèves-professeurs des écoles. Il s'agit d'un public dont les connaissances mathématiques sont enfouies dans le passé et dont les connaissances en géométrie en particulier n'ont jamais eu l'occasion d'être rafraîchies. N'oublions pas que cet enseignement a été souvent - à tort - le parent pauvre de la scolarité.

La question a été posée dans les mêmes conditions. Treize étudiants sur trente-et-un (presque la moitié) donnent une définition correcte. A noter trois définitions originales : *c'est un quadrilatère ayant 4 côtés égaux et un angle droit* ou *un polygone régulier ayant un angle droit* ou bien encore *c'est un quadrilatère rectangle et losange*.

Quatorze étudiants donnent des propriétés significatives et pertinentes et trois étudiants «seulement» donnent des propriétés banales comme : *c'est une surface plane* ou *c'est une forme géométrique*. Un élève fait référence au cube.

Pour compléter le tableau, nous avons demandé au même public :

Ecrivez tout ce que vous savez sur le carré.

La consigne est cette fois-ci volontairement très ouverte. Les élèves de l'école élémentaire donnent plusieurs réponses en général. Seuls un élève de CE₁ et un élève de CM₂ ne donnent aucune réponse.

Notons que le nombre de réponses significatives est de trente-huit avec 1,65 réponses en moyenne par élève.

L'analyse des réponses montre que les propriétés de type combinatoire relatives au nombre de côtés ou d'angles sont fortement représentées.

Au CE₂, sur trente-huit réponses significatives, vingt-huit sont de nature combinatoire. Notons deux réponses pas banales du tout : *la diagonale le partage en 2 triangles pareils* (c'est d'ailleurs la seule référence à la diagonale du carré au CE₂) ou *c'est un losange couché*. Quatre élèves font allusion au cube.

Les vingt-quatre réponses non significatives sont toutes de nature combinatoire avec quelques «curiosités» comme : *il a 6 faces* ou *6 côtés* ou *8 sommets* ou *12 arêtes*. Il semble que la confusion avec le cube ne soit pas étrangère à ces curiosités.

Au CM₁ on peut noter que le nombre de réponses significatives qui est de cinquante, est plus important en moyenne de 2,17 par élève. Celles de nature combinatoire sont au nombre de dix-huit soit une sur trois environ. Pour la première

fois apparaissent des propriétés comme l'orthogonalité ou le parallélisme. Aucun élève ne parle de diagonale et un élève parle de symétrie. Les réponses non significatives sont aussi des souvenirs de propriétés du cube.

Au CM₂, quatre-vingt-quatre réponses significatives sont données, soit 3,24 réponses par élève. Les réponses de nature combinatoire sont faibles (quinze, soit moins de 20 % des réponses). Ce qui est intéressant, c'est la référence au parallélisme et à l'orthogonalité qui est bien sûr plus fréquente qu'au CM₁, mais surtout des propriétés moins courantes comme la propriété de symétrie : *il a 4 axes de symétrie*, ou les propriétés des diagonales : *les diagonales sont perpendiculaires*, ou bien encore *les diagonales se coupent en leur milieu*.

Notons enfin qu'il n'y a pas de réponses aberrantes.

Concernant le groupes des élèves-professeurs, le nombre de réponses significatives est de 3,58 par élève. Il n'y a pas de réponse de nature combinatoire qui, à ce niveau, est un implicite très fort. Notons que deux élèves seulement font référence aux médianes du carré.

Enfin, dans une dernière étude qui n'a concerné que les élèves du CM₁ et du CM₂, nous leur avons présenté des propriétés géométriques et leur avons demandé de noter celles qui étaient relatives au carré avec la possibilité explicite de ne pas répondre au besoin. Les propriétés proposées étaient très variées allant de simples propriétés combinatoires à des propriétés comme la symétrie ou la présence de médianes.

L'analyse rapide des réponses montre, à quelques exceptions près, que les propriétés combinatoires sont bien connues. L'égalité des côtés et des angles est une propriété bien intégrée au CM₁ et parfaitement connue au CM₂. Il en va de même pour les propriétés des diagonales pour le CM₂, ce qui peut être réjouissant. Tous les élèves de CM₂ ne reconnaissent pas que le carré est un losange alors que quatre élèves de CM₁ le reconnaissent. Peu d'élèves reconnaissent qu'il s'agit d'un polygone ou d'un quadrilatère, et ceci pour les deux niveaux ; en revanche la référence au cube est parfaitement connue de tous, à peu de chose près. Les propriétés des diagonales sont aussi bien connues, mais la connaissance sur les propriétés des médianes me paraît très suspecte.

Quelle conclusion tirer de cette courte étude ?

Lorsque l'on observe le nombre de réponses significatives par élève, on peut remarquer que ce nombre est en progression du CE₂ au CM₂. Et que donc les propriétés du carré s'enrichissent pour les élèves au fur et à mesure de la scolarité. Il semble que l'utilisation du cube et de ses propriétés pour l'étude du carré soit un procédé intéressant mais qu'il nécessite, à un moment donné, de donner au carré son «indépendance» en en faisant une étude en soi.

ANNEXE 1

TESTS PASSÉS EN FÉVRIER 1994

QU'EST-CE QU'UN CARRÉ ?		CE ₂	CM ₁	CM ₂
S	4 côtés égaux et 4 angles droits			4
I	4 côtés égaux		4	5
G	4 côtés	1		
N	4 angles droits, 4 arêtes, 4 sommets		2	
I	figure qui a 4 angles droits		1	
F	4 segments de droite qui se rejoignent			1
I	4 sommets et 4 arêtes	3		
C	4 angles égaux		2	
A	c'est un quadrilatère			1
T	c'est un parallélogramme			1
I	c'est un polygone			2
V	c'est la face d'un cube	5		
E	surface plane			7
S	forme géométrique	9	7	12
NS	3 côtés égaux		1	
	c'est un angle droit		1	
	comme un triangle moins pointu		1	
	c'est un cube	3	3	1
	c'est un carré	1	1	
	pas de réponse	2		
NOMBRE DE RÉPONSES		24	23	24

ANNEXE 2

ÉCRIS TOUT CE QUE TU SAIS SUR LE CARRÉ		CE ₂	CM ₁	CM ₂
	4 côtés égaux		12	21
	4 côtés	5	3	1
	tous les côtés ont la même dimension ou même mesure	4		3
	4 angles droits		6	17
	il a 4 angles		3	1
	des angles droits			7
	les côtés sont perpendiculaires		2	1
S	il a des perpendiculaires		2	
I	il a 4 sommets	11	9	11
G	il a 4 arêtes	12	3	3
N	il a 2 côtés opposés parallèles			1
I	il a des parallèles ou des côtés parallèles		5	2
F	ses diagonales sont égales			2
I	les diagonales se coupent en leur milieu			3
C	les diagonales sont perpendiculaires			5
A	il a 2 diagonales			2
T	il a des diagonales			3
I	il a des médianes perpendiculaires			1
V	il a un axe de symétrie		1	1
E	il a 4 axes de symétrie			1
S	la diagonale le partage en 2 triangles pareils	1		1
	c'est un polygone			2
	c'est un quadrilatère			1
	il ressemble à un rectangle		1	
	c'est un losange couché	1		1
	c'est une figure fermée		1	
	c'est la face d'un cube	4		
	pas oval, pas rectangle, pas losange, pas triangle		1	
	c'est une surface plane ou forme plane		1	3
NS	il a une face	8		
	il a 2 faces	4		
	il a 6 faces ou 6 côtés	4	5	
	il a 8 sommets	5	2	
	il a 8 arêtes	2		
	il a 12 arêtes	3	2	
	il a 13 arêtes	1		
	c'est un cube		2	
	pas de réponse	1		1
nombre d'élèves		23	23	23
nombre de réponses par élève		2,83	2,65	3,24
nombre de réponses significatives par élèves		1,65	2,17	3,24

ANNEXE 3

TABLEAU D'EFFECTIFS	CM ₁			CM ₂			
	un carré	vrai	faux	NSP*	vrai	faux	NSP
a ses côtés égaux	20			3	30		
a 4 côtés	17	6			29	1	
a 8 côtés	2	21				30	
a 12 côtés	1	22				30	
a 6 côtés	4	19			1	29	
a 4 angles	17	6			29	1	
a 6 angles		23				30	
a 8 angles	2	21			1	29	
a 12 angles	3	19	1			30	
a tous ses angles égaux	16	1	6		30		
a 4 sommets	16	7			29	1	
a 6 sommets	3	20			1	29	
a 8 sommets	4	19			1	29	
a 12 sommets	2	21				30	
a 2 médianes	7	9	7		18	3	9
a 4 angles droits	18	2	3		26	2	2
a 2 diagonales qui sont perpendiculaires	11	9	3		24	4	2
a 2 diagonales qui sont égales	14	5	4		25	2	3
n'a pas d'axe de symétrie	4	16	3			20	10
a ses diagonales qui se coupent en leur milieu	13	8	2		26	4	
c'est un losange	4	18	1		1	29	
c'est un triangle	1	22			1	29	
c'est un cube	7	14	2		7	21	2
a 4 axes de symétrie	15	6	2		13	7	10
c'est un quadrilatère	7	5	11		17	6	7
c'est un parallélogramme	6	6	11		4	17	9
c'est un polygone	5	10	8		10	10	10
c'est la face d'un cube	19	4			28	2	
il a des médianes	18		5		10	11	9
il a des médianes perpendiculaires	18		5		10	11	9
est une surface plane	8	7	8		24	5	1
est une forme géométrique	21	2			29		1

* «ne se prononcent pas»

ANNEXE 4

**TESTS PASSÉS EN SEPTEMBRE 1994
PAR DES ÉLÈVES PROFESSEURS D'ÉCOLE EN FORMATION**

QU'EST-CE QU'UN CARRÉ ?		PE ₁
	4 côtés égaux et 4 angles droits	4
	parallélogramme, 4 côtés égaux et 4 angles droits	4
S	4 côtés égaux et 1 angle droit	3
I	polygone régulier ayant un angle droit	1
G	c'est un quadrilatère rectangle et losange	1
N	figure qui a 4 côtés égaux et parallèles 2 à 2	1
I	4 côtés égaux	4
F	figure de 4 arêtes	1
I	figure qui a 4 côtés égaux	1
C	figure qui a 4 angles droits	1
A	4 angles égaux	1
T	c'est un parallélogramme aux diagonales perpendiculaires	1
I	c'est un parallélogramme à 4 côtés égaux	1
V	c'est un quadrilatère dont les côtés sont égaux et parallèles	1
E	c'est un parallélogramme	1
S	c'est un polygone régulier	1
	surface plane	1
	forme géométrique	2
NS	c'est un cube ou un dé à jouer	1
NOMBRE DE RÉPONSES		31

ANNEXE 5

QUELLES SONT TOUTES LES PROPRIÉTÉS DU CARRÉ QUE VOUS CONNAISSEZ ?		PE ₁
	4 côtés égaux	23
	tous les côtés ont la même dimension ou même mesure	1
S	4 angles droits	21
I	au moins un angle droit	1
G	les côtés sont perpendiculaires	2
N	il a 2 côtés opposés parallèles	1
I	côtés parallèles deux à deux	18
F	ses diagonales sont égales	12
I	les diagonales se coupent en leur milieu	20
C	les diagonales sont perpendiculaires	5
A	il a des médianes qui se coupent en leur milieu	1
T	il a des médianes (ou médiatrices) perpendiculaires	1
I	il y a 4 axes de symétrie	1
V	il a un centre	2
E	il a un plan de symétrie	1
S	la diagonale le partage en deux triangles isocèles	1
	aire = $a \times a$	6
	périmètre = $4 \times a$	7
	il ressemble à un triangle	1
	c'est une surface plane ou forme plane	2
NS	c'est un triangle	1
	il a 6 faces	1
	il a 12 arêtes égales	1
	volume = $a \times a \times a$	1
	c'est un cube	1
	pas de réponse	1
nombre d'élèves		31
nombre de réponses par élève		3,58
nombre de réponses significatives par élève		3

