ETAPES DU CALCUL MENTAL

François BOULE
Professeur de mathématiques IUFM de Bourgogne

Le calcul mental est une activité tenue pour importante à l'école élémentaire, et depuis longtemps. Néanmoins sa pratique semble souvent irrégulière et imprécise, et nettement éclipsée par la mise en place des techniques écrites. Les pages qui suivent ont pour objet de préciser les voies spécifiques du calcul mental, une esquisse de progression qualitative (étapes), et quelques supports d'activités possibles.

Ce n'est pas seulement la présence ou l'absence d'un support qui distingue le calcul mental du calcul écrit, du moins dans le cas d'opérations complexes.

Exemple : soit à calculer 73 – 27.

Cela revient à déterminer **l'*écart*** entre 27 et 73, ou encore à retrancher 27 de 73 ; ce que l'on pourra ramener à retrancher de 73 d'abord 20, puis 3, puis 4 ; ou encore à retrancher 30, puis ajouter 3.

Il s'agit dans tous les cas d'opérer sur des nombres que l'on peut figurer sur une graduation :

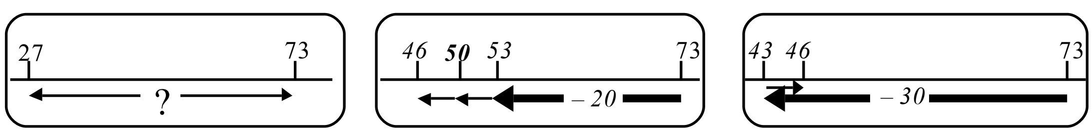


fig. 1 : stratégies variées

Tandis que si l'on *pose l'opération*, on fait agir un algorithme qui énonce des manipulations à opérer sur les **chiffres** des unités, puis les **chiffres** des dizaines. Les **nombres** 73 et 27 sont provisoirement perdus de vue, et par conséquent aussi l'ordre de grandeur du résultat. Alors qu'un calcul *approché* conduit à penser que le résultat est proche de 75 – 25, c'est-à-dire 50.

Cet exemple montre également trois autres caractéristiques qui opposent calcul mental d'une part et techniques écrites (ou machinales) d'autre part. La technique écrite est la transcription d'un algorithme, c'est-à-dire une démarche dont l'exécution est prescrite et univoque. Alors que le calcul mental (ou pensé, ou réfléchi…), dans le cas d'une opération complexe ouvre la possibilité de plusieurs démarches de calcul exact ou de calcul approché.

• Intervient donc une composante de **planification** de l'action,

• une composante **stratégique** : choix entre plusieurs démarches.

• Enfin ces démarches font intervenir explicitement des **représentations** numériques (ordre de grandeur, comparaison), et des propriétés des opérations (commutation, distribution…). C'est pourquoi les premières étapes ci-dessous visent à mettre en place plusieurs types de représentations numériques. Il s'agit d'abord de supports matériels (bande numérique, constellations etc.) dont la fréquentation conduira peu à peu à une intériorisation, représentation mentale qui sera le vrai support du calcul mental.

*Les techniques de calcul sont nécessaires pour effectuer des calculs difficiles. Mais le calcul mental doit être développé **en même temp**s. Il y a à cela plusieurs raisons :*

1. Il permet, pour des opérations simples de se passer de crayon et de papier, et surtout d'obtenir le résultat plus rapidement.

2. Il entraîne une meilleure compréhension des nombres, et par conséquent de meilleurs résultats y compris dans le calcul écrit.

*3. Il fait intervenir des représentations **multiples** des nombres, et par conséquent résiste mieux à l'oubli que des procédures apprises mécaniquement et souvent dépourvues de sens pour les enfants.*

ETAPE 1 : LA LISTE NUMERIQUE (DEBUT CP)

Cette étape débute au CP par l'utilisation de la liste des noms de nombres :

un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit		

fig. 2 : liste numérique verbale

C'est une **liste verbale** : elle commence à UN et en croissant de un en un. Il s'agit de la rendre disponible rapidement, par des exercices fréquents et courts. Exemples :

• Quel est le suivant cinq ? (le nombre juste après cinq) ; c'est cinq plus un égale six.

• Quel est le nombre juste avant sept (précédent de sept) ? C'est « sept moins un égale six ». On peut écrire « six plus un égale sept ».

• On fait réciter la liste à partir dun nombre : un enfant dit quinze ; son voisin dit le suivant seize, etc.

• Associer des constellations à ces mots, en faisant énoncer à haute voix, et ranger des cartes à jouer, ou des faces de dés.

• On affiche la liste des nombres écrits en chiffres :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	

fig. 3 : liste numérique chiffrée

puis on masque quelques nombres qu'il s'agit de retrouver. On renforce ainsi la correspondance « mot » <—> écriture chiffrée.

Cette liste est indispensable pour les activités de comptages, de dénombrements et de calcul (cf. Gellman) ; mais elle doit être associée aux représentations analogiques (constellations, doigts ; cf. Brissiaud). On peut imaginer l'affichage permanent d'une frise portant à la fois les nombres en chiffres, les mots-nombres (en particulier ceux qui dérogent par rapport à la numération en base dix) et des représentations analogiques, comme ci-dessous.

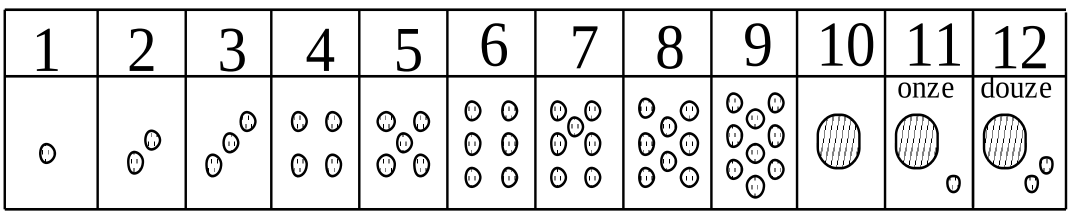


fig. 4 : liste chiffrée avce constellations

ETAPE 2 : LA LISTE INVERSE

L'expérience montre qu'elle est plus lentement acquise (même difficulté que l'ordre alphabétique inverse pour les adultes). L'installation de ce schème s'appuie sur le support visuel (liste ci-dessus), mais aussi verbal (liste des mots).

• on fait réciter la liste à partir d'un nombre en descendant.

Ce n'est pas encore du calcul ; mais ces étapes sont indispensables au calcul et doivent faire l'objet de petits exercices brefs et fréquents.

LE CALCUL ADDITIF

ETAPE 3 : LE TABLEAU NUMERIQUE (CP)

L'expérimentation a montré que l'on peut distinguer des opérations « simples » dont le résultat est obtenu de façon rapide et sûre, par opposition à des opérations « complexes » pour lesquelles les démarches (au moins en CM2) sont beaucoup plus variées, et le taux de réussite (surtout en CE2) beaucoup plus faible. On peut considérer que les premières relèvent davantage d'une « consultation de liste » que d'un véritable calcul. On range parmi elles les opérateurs [+1], [+10], et aussi [–1], [-10], éventuellement [+11] si l'on admet qu'il s'agit d'une composition de deux schèmes simples. L'expérience montre que [+10] et [+1] sont comparables quant au délai de réponse, et au taux de réussite. On peut donc sans doute interpréter également [+10] comme une consultation de liste :

vingt										trente										quarante
	1	2	3	4	5	6	7	8	9		1	2	3	4	5	6	7	8	9	

fig. 5 : les opérations “simples” opèrent sur une double liste

Supposons que l'on découpe la bande numérique après 9, puis après 19, etc... et que l'on colle ces morceaux au-dessous les uns des autres. Cela donne un tableau :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	...				

C'est ici qu'intervient la numération écrite, c'est-à-dire l'organisation non pas des mots, mais des nombres. Les nombres situés dans la même colonne ont le même chiffre des unités. Dans une même ligne, ils ont tous le même chiffre des dizaines .

Il est donc facile de compter de 10 en 10 : il suffit de descendre d'une case. Pour ajouter 1, on passe à la case voisine à droite, pour enlever 1, à la case voisine à gauche (si possible).

Ainsi on obtient 3**6** + 10 = 4**6** beaucoup plus rapidement qu'en ajoutant 1 dix fois de suite, c'est-à-dire en parcourant la liste, ou en comptant sur les doigts.

Règle :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

fig.6 : le tableau numérique

Pour éviter la difficulté du passage à la ligne, on peut imaginer 2 autres dispositions en spirale :

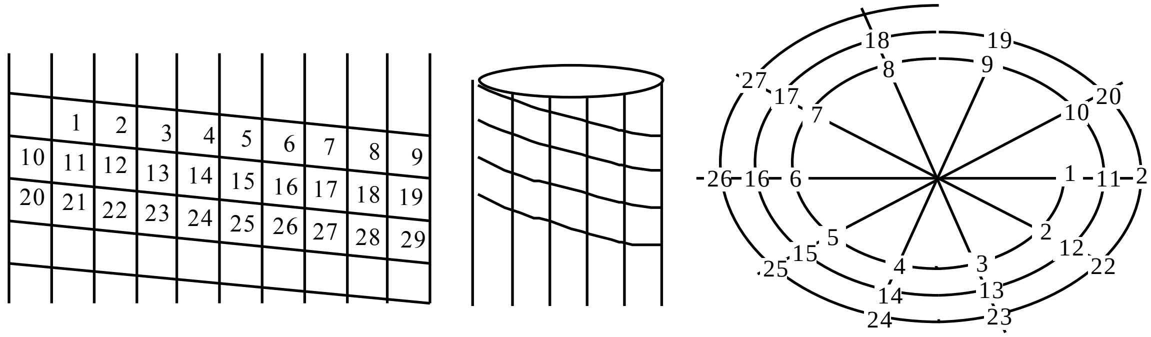


fig. 7 : dispositions en spirales

Le tableau de nombres doit être affiché dans la classe, et figurer dans le cahier des enfants. C'est un premier instrument de calcul qu'ils doivent utiliser fréquemment. Laissé à disposition, il est un support pour faire du calcul. Son usage a pour but de faire mémoriser la disposition relative des nombres, et donc d'établir une représentation mentale de ces nombres.

C'est d'ailleurs ainsi que fonctionne également le calendrier : d'abord bande illimitée, puis par découpage hebdomadaire, ramenée en tableau.

Des exercices simples de calcul, avec l'aide de la table, conduisent à la construction de cette représentation mentale.

Exemples : (CP) On énonce un nombre, il faut lui ajouter une dizaine ;

(CE1) puis combiner avec les opérateurs [+1] ou [–1] : Pour ajouter 9, ou bien ajouter 11, on se déplace en général en diagonale, etc. Ceci établi, la table doit devenir superflue.

L'expérience montre que cette démarche est beaucoup plus rapide que la procédure écrite.

Voici quelques variantes de cette activité ayant pour support la bande numérique ou le tableau, d'abord présent, puis mémorisé :

• Les enfants sont placés en rond, et interrogés à tour de rôle, ou même désignés un à un, au gré du maître. On se donne un nombre de départ. puis on demande de compter de 2 en 2, ou de 5 en 5 en croissant, ou bien à rebours. La seconde variante (désignation arbitraire) contraint le public à rester attentif, alors que la première (retour prévisible) s'accomode d'une attention intermittente.

• Compter de 5 en 5 :

à partir d'un multiple de 5 : Les unités sont 0 ou 5, les dizaines changent une fois sur deux.

à partir d'un autre nombre ; par exemple 34 ou 31. Ces nombres sont voisins de 30 ou 35. Les nombres 31+5 et 34+5 sont donc dans les colonnes voisines des précédentes. Cette idée de voisinage est importante pour tout ce qui va suivre..

• Compter de 2 en 2. Les chiffres des unités sont successivement 2, 4, 6, 8, 0 ...

Ces exercices, comme les précédents doivent être fréquents et brefs, afin que la liste des nombres pairs devienne disponible rapidement.

Ainsi s'installe un rythme sur la bande numérique, que l'on marque en substituant peu à peu une graduation (CE, CM) qui devient un support du calcul :

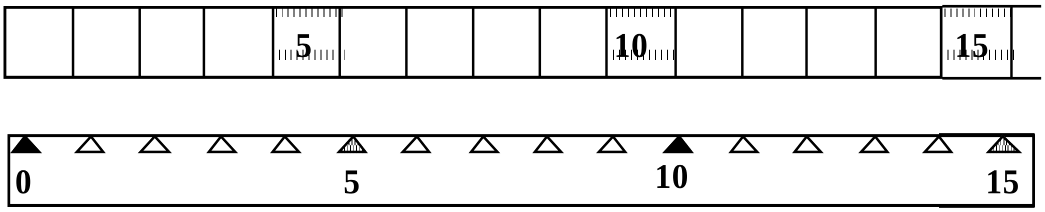


fig. 8 : graduation numérique

Le repérage d'un nombre sur une droite est une étape importante dans l'estimation d'un résultat ou le calcul approché. C'est ici l'ordre de grandeur, c'est-à-dire une estimation globale, qui est alors mise en jeu. Exemple :

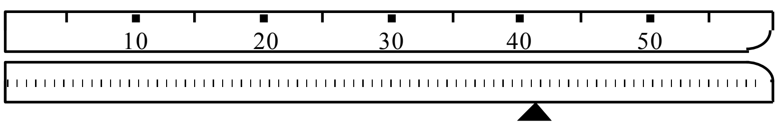


fig. 9 : estimation d'un nombre, encadrement

La règle est graduée régulièrement de 0 à 60. On la retourne, et l'on place un curseur quelque part. Il faut deviner quel est le nombre indiqué par ce curseur ?

Cet exercice valorise la relation d'ordre sur les nombres, et l'estimation de grandeur.

Toutes les activités précédentes tendent à renforcer le fonctionnement analogique de la « droite numérique ». Il en sera de nouveau question à propos des stratégies de calcul.

• Autre exemple : utilisation du JEU de L'OIE.

Plusieurs variantes sont connues. Il s'agit de parcourir une piste numérique (les cases sont signalées par des nombres écrits en chiffres), en progressant du nombre de pas indiqué par un dé (constellation). Le but [éducatif] du jeu est que l'enfant ne progresse pas de case en case, mais parvienne à anticiper la case d'arrivée, c'est-à-dire opère un calcul.

ETAPE 4 : LE REPERTOIRE, LES NOMBRES AMIS. (CP, CE)

La suite des nombres, au moins verbalement mais le plus souvent aussi sous forme chiffrée est connue des enfants de fin de G.S. jusqu'à la vingtaine ou la trentaine. Dès avant, les enfants connaissent aussi des résultats, comme « 2+2 = 4 » et quelques autres. Ces résultats sont disparates et lacunaires. L'un des objets du C.P. est de les systématiser dans la Table d'addition, et de rendre rapide leur récupération. L'expérience montre qu'il s'agit d'abord le plus souvent d'une reconstruction (surcomptage par exemple), et que la récupération de « résultats déclarés » ne devient majoritaire que vers l'âge du CE2. On rangera ces résultats destinés à être « connus par cœur » dans la rubrique REPERTOIRE, sans s'attacher ici à savoir s'ils sont reconstruits ou bien récupérés.

Mais il est clair qu'en faisant de la rapidité un objectif, on incite à préférer la récupération en mémoire.

Il en est de même pour la Table de multiplication.

Au début du CP, les résultats additifs sont peu à peu relevés et classés. Exemple :

9	10	11	12
8+1	9+1	10+1	11+1
3+3+3	8+2	6+5	6+6
	5+5	…	

fig. 10 : répertoire additif

Ceci conduit à la TABLE D'ADDITION qui doit, elle aussi, être affichée dans la classe et sur le cahier des enfants, coloriée, observée, utilisée souvent.

L'exercice suivant fait apparaître l'articulation entre reconnaissance des constellations et répertoire. Des ensembles de points sont représentés sur des cartes assez grandes. Une carte est présentée pendant un délai assez court (4 ou 5 secondes en CP, 2 ou 3 secondes en CE).

Combien de points ?

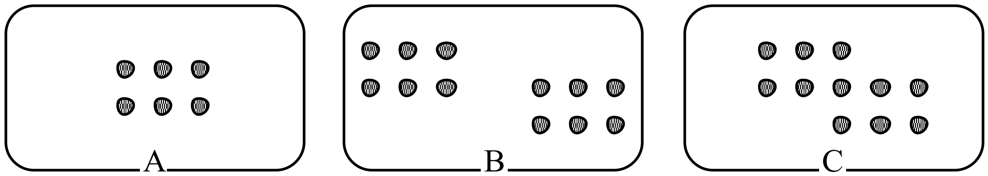


fig. 11 : lecture rapide. COMBIEN DE POINTS ?

La lecture de [A] relève de l'identification d'une constellation habituelle. L'entraînement conduit à une identification globale rapide. Dans le cas de [B], il s'agit plutôt d'un découpage perceptif en 6 et 6. C'est la *consultation du répertoire* ou la *reconstruction du résultat* qui aboutit alors à 6+6 = 12. En revanche la situation [C] est perceptivement plus ambiguë ; plusieurs découpages sont possibles, sans qu'aucun ne soit privilégié. Il est possible aussi que l'on identifie deux constellations « six » sans remarquer qu'elles sont non-disjointes. Le délai de réponse relatif à [C] fera certainement apparaître un effet d'hésitation ou d'oscillation quant à la reconnaissance perceptive. On voit ainsi qu'une composante stratégique peut intervenir dans des situations de calcul proposables dès le C.P.

Le REPERTOIRE comporte des énoncés additifs (ou multiplicatifs) mais sous des formes diverses. Ainsi un résultat de type (tel que 7+5 = 12), pourra être sollicité sous des formes comme « P + Q = R », ou bien « R - Q = P », ou encore « P, c'est R - Q » ou enfin « R, c'est P + Q » (décompositions additives et soustractives). A cet égard, les décompositions de DIX (comme 7 + 3 = 10, ou 7 = 10 – 3), et les décompositions autour de CINQ (comme 7 = 5 + 2) ont un rôle privilégié. Elles peuvent être exercées à l'aide de représentations visuelles comme les mains (fig. A), ou à l'aide de constellations, ou encore de représentations analogiques (dont les Nombres en Couleurs ont été une illustration, fig.E)

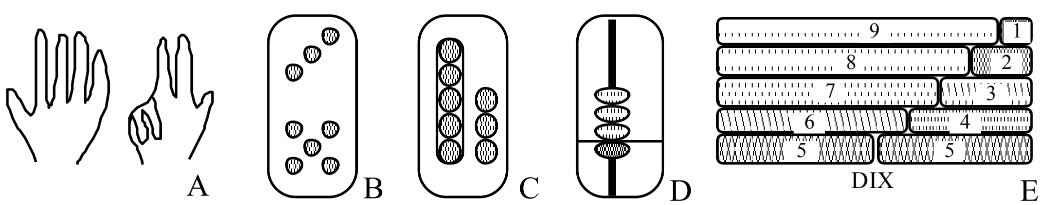
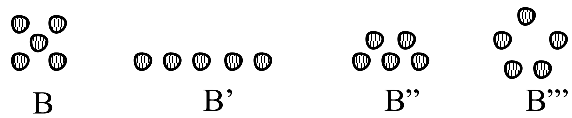


fig. 12 : Représentations des décompositions additives

Il est bien reconnu qu'un type exclusif de représentation n'est pas souhaitable, sous peine de conduire à des rigidités préjudiciables. Chaque type de présentation offre des commodités, mais aussi des inconvénients. La constellation « domino » cinq [fig.B] défavorise l'aspect mesure (analogique), puisque « cinq » peut apparaître sous d'autres formes.



quelques constellations "cinq"

C’est pourquoi on peut préférer la constellation qui associe à cinq la demi-dizaine sous forme d’une représentation linéaire [fig.C]. L’usage du boulier [D], qui ne saurait être exclusif ni même privilégié dans le contexte culturel européen, est un bon exemple de l’importance des décompositions « autour de cinq » pour les calculs additifs. A ce titre, il peut constituer un bon support temporaire. Les représentations [B], [C], [D] favorisent les décompositions autour de cinq (comme 8 = 5 + 3). On peut souhaiter élargir ce répertoire : c’est ce que proposent les représentations analogiques, du type [E]. Mais toutes ces représentations imagées ([B], [C], [D], [E]) sont peu favorables à l’entraînement des décompositions soustractives.

Le répertoire peut être exercé par des situations de jeu dont le support est verbal, ou chiffré, ou analogique. C’est le cas de nombreuses variantes de dominos.

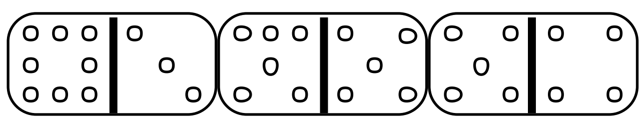


fig. 13 : Dominos 1–9 [voir annexe]

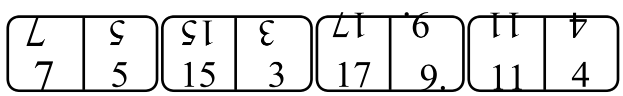
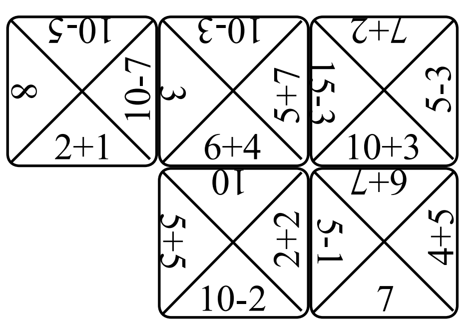


fig. 14 : Dominos

On peut également imaginer des jeux de dominos (à une ou deux dimensions) avec la règle de voisinage habituelle, mais utilisant les décompositions numériques.



Dominos à deux dimensions.
Règle de voisinage habituelle

fig. 15 : dominos à deux dimensions

Ce type de jeu peut être enrichi progressivement (décompositions additives, puis additives-soustractives à deux puis deux ou trois termes, puis multiplicatives, etc.

On peut également fonder des jeux ou exercices sur la *comparaison* de plusieurs écritures additives, ou décompositions additives-soustractives.

Exemple : à l'issue d'un jeu de fléchettes deux joueurs ont obtenu les scores suivants, « 1, 1, 3, 2, 5 » pour l'un, « 2, 2, 3, 3, 1 » pour l'autre. *Qui a gagné ?* La conclusion peut être obtenue par ***comparaison***, sans calculer le score total.

Dans ce cas, cette comparaison sera d'abord favorisée si les différents scores sont représentés par des cartes que l'on peut regrouper pour effectuer des calculs partiels :

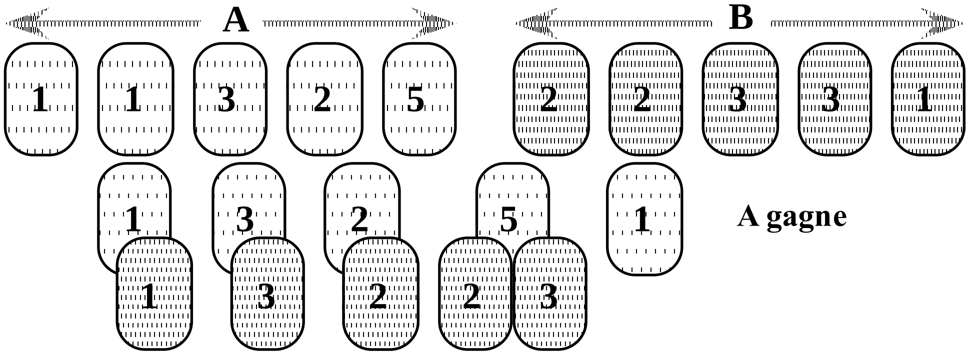


fig. 16

Il faut également remarquer que les énoncés du répertoire ne sont pas psychologiquement symétriques : de « 9 fois 5 = 45 » et « 5 fois 9 = 45 » l'un est plus facilement récupéré que l'autre (souvent le premier). Corrélativement, les *doubles* et les carrés sont mieux mémorisables, et ont donc un rôle particulier dans les démarches de calcul. Ainsi pour calculer 25 + 28, on peut recourir à « 25 + 25 = 50 » puis ajouter 3.

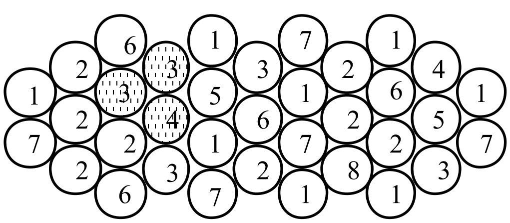
On favorise la mémorisation du répertoire et son accès rapide par des moyens et des supports variés. Ces exercices commencent dès le CP ; ils doivent être fréquents, variés et de courte durée.

Il peut s'agir simplement d'une table d'addition (et par la suite de multiplication), dont on masquera des cases à mesure que leur mémorisation semble assurée (ou afin de l'encourager).

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	2		4	5	6	7
2			5	6	7	8
3	4	5		7	8	9
4	5		7	8	9	
5	6	7	8	9		11
6	7	8	9		11	12

fig. 17



Autre exemple :
indiquer les "triangles" qui totalisent dix

(on en a indiqué un en gris, mais il y en a beaucoup d'autres) *fig. 18*

Nombres SIMPLES : ce sont les dizaines, les centaines... Ils sont faciles à retenir. C’est pourquoi leurs décompositions sont importantes pour les calculs.

Nombres **AMIS** : ce sont des nombres dont la somme est **SIMPLE**. Par exemple les décompositions de 10 ou de 100. Il est utile de les repérer afin de faciliter les calculs.

Le premier exemple utilise un jeu de cartes.

Plusieurs joueurs tirent au hasard dix cartes une à une et les retournent. Il s’agit de savoir qui a le plus grand total. Un regroupement des « amis » facilite le calcul :

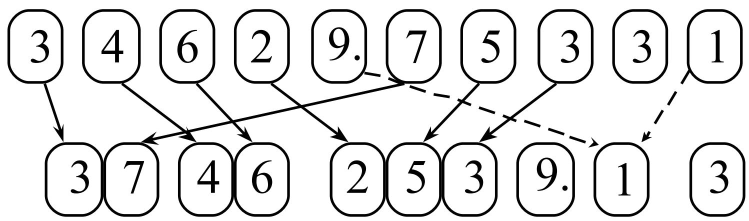


fig. 19

Autre exemple (CM) : comment calculer S = 73 + 11 + 24 + 6 + 27 + 80 + 9 ?

On regroupe les « amis » : 73 + 27 = 100   24 + 6 = 30   9 + 11 = 20

Donc   S = 100 + 30 + 20 + 80 = 230

Encore un exemple (CM) : **comment calculer facilement un complément à 100, à 1000 ou à 10 000.**

Règle : *Enoncer le résultat de gauche à droite en prenant le complément à 9 de tous les chiffres sauf le dernier et le complément à 10 de celui-ci*. Ceci permet d’énoncer le résultat *directement* de gauche à droite, alors que la procédure écrite le fournit de droite à gauche (économie de mémoire).

Ainsi : le complément à 10 000 de 7321 est 2679.

ETAPE 5 : LA REGLE A CALCUL (CE)

Ce n’est plus la suite numérique qui est utilisée, mais la GRADUATION :

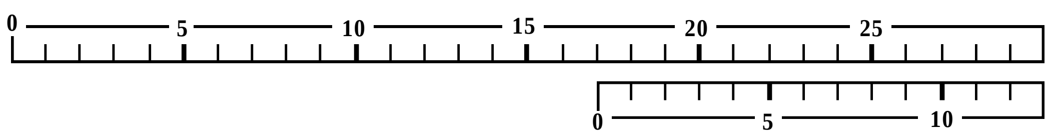


fig. 20 : usage de la règle à calcul additive

Sur cette graduation, tous les nombres ne figurent pas. Un premier exercice consiste à repérer un nombre quelconque sur la règle (p. ex. 17 ou 22). Ce repérage se fait par rapport aux *voisins*.

Cette graduation est un outil de calcul. Pour cela, on utilise une seconde règle (fig. ci-dessus).

Ajouter 17 et 12, c'est mettre bout à bout deux bandes de longueurs 17 et 12.

Pour représenter cela : placer le 0 de la règle B en face du 17 de la règle A, et lire le résultat en face du 12 de la règle B : on trouve 29.

Pour **retrancher** 17 de 53 : placer le 17 de la règle B en face du 53 de la règle A, et lire en face du 0 de la règle B. On trouve 36.

Cet instrument permet de lire des résultats, non de calculer. Mais sa pratique fréquente va induire une représentation dans la mémoire. Calculer mentalement, c'est opérer de cette façon, mais en l'absence des règles numériques matérielles.

ETAPE 6 : STRATEGIES DE CALCUL, NOMBRES PIVOTS, (NIVEAUX CE2 ET SUIVANTS)

Le calcul, véritablement, débute lorsqu'il s'agit d'obtenir un résultat qui ne fait pas partie du Répertoire connu, ou qui ne relève pas d'opérateurs simples comme ±1 ou ±10.

Les séquences de calcul mental ont pour but de rendre routinières, c'est-à-dire rapides et sûres, les opérations simples. Il doit s'agir d'exercices très brefs, et pour lesquels la rapidité est un objectif.

En revanche, en ce qui concerne les opérations complexes, la rapidité n'est pas un objectif prioritaire. C'est la sûreté, et par conséquent l'économie procédurale, qui est recherchée. On s'attachera dans ce cas prioritairement à l'aspect stratégique, c'est-à-dire à la variété des démarches possibles, et à un choix motivé (mais qui peut être différent pour tel ou tel enfant).

Exemple : comment obtenir le résultat de 31 - 18 ?

- Il s'agit de trouver la distance entre 18 et 31 sur la graduation. Pour aller de 18 à 31 on passe d'abord de 18 à 20 (distance 2), puis de 20 à 30 (distance 10), puis de 30 à 31; résultat 2 + 10 + 1 = 13
- On peut imaginer aussi de reculer de 18 pas à partir de 31. Reculer de 10 : on est à 21. Pour reculer de 8 : reculer de 1 puis de 7. On passe par 20. 20 – 7 = 13 (amis). Résultat : 13
- Ou bien on peut reculer de 1 (on est à 30) puis de 10 (on est à 20), puis de 7.
- Ou encore : 18 est voisin de 20. Enlever 18, c'est enlever 20, puis ajouter 2. La valeur 20 sert de PIVOT. 31 – 20 = 11 puis 11 + 2 = 13
- On peut également s'apercevoir que 31-18, c'est *comme* 30 - 17 (écarts constants). Résultat : 13 car 17 et 13 sont amis.

D'autres démarches sont encore possibles.

Cet exemple montre trois caractéristiques qui opposent calcul mental d'une part et techniques écrites (ou machinales) d'autre part. La technique écrite est la transcription d'un algorithme, c'est-à-dire une démarche dont l'exécution est prescrite et univoque. Alors que le calcul mental (ou pensé, ou réfléchi), dans le cas d'une opération complexe ouvre la possibilité de plusieurs démarches de calcul exact ou de calcul approché.

- Intervient donc une composante de planification de l'action,

• une composante stratégique : choix entre plusieurs démarches.

• Enfin ces démarches font intervenir explicitement des représentations numériques (ordre de grandeur, comparaison), et des propriétés des opérations (commutation, distribution…).

On ne peut parler d'une composante stratégique que si l'on envisage *plusieurs* démarches concurrentes, et si l'on dispose de critères pour en sélectionner une. Le plus souvent en CE2 les enfants n'ont paru disposer que de la démarche consistant à « poser l'opération dans sa tête », c'est-à-dire procéder en colonne. Si cette démarche conduit à des retenues, on peut lui en préférer d'autres, faisant intervenir une suite d'opérateurs.

C'est pourquoi il est sans doute opportun d'exercer le repérage rapide de quelques critères, avant même d'entreprendre un calcul.

Voici quelques exemples (pour des opérations à deux chiffres) :

• Pour une soustraction : le résultat sera-t-il une dizaine entière ?

45 – 15	64 – 46	34 – 24	17 – 13	78 – 28	56 – 18

• Pour une addition : le résultat sera-t-il une dizaine entière ?

17 + 24	17 + 13	53 + 26	32 + 81	12 + 38	19 + 91

• l'opération comporte-t-elle ou non une retenue ?

54 – 11	17 + 35	71 – 23	45 + 56	34 – 15	56 + 31
54 + 45	56 – 34	17 + 21	34 – 13	77+ 21	65 – 56

En effet, s'il n'y a pas de retenue, la démarche « en colonne » et procédant de gauche à droite, est sans doute la plus judicieuse. Alors que s'il y a une retenue, il est préférable de recourir à une suite d'opérateurs, en privilégiant les dizaines entières les plus proches. Mais plusieurs démarches sont alors en concurrence, comme dans l'exemple ci-dessus.

La démarche peut être induite par le contexte, ou bien libre. Dans le premier cas, il s'agit de renforcer une démarche nouvelle, dans le second d'élargir l'éventail des démarches possibles, et de les discuter ; c'est alors l'aspect stratégique qui est visé.

Voici quelques exemples du premier cas :

A la suite d'une activité sur le tableau numérique, on présente par écrit les exercices suivants :

$\xrightarrow{+3}$

31			40				

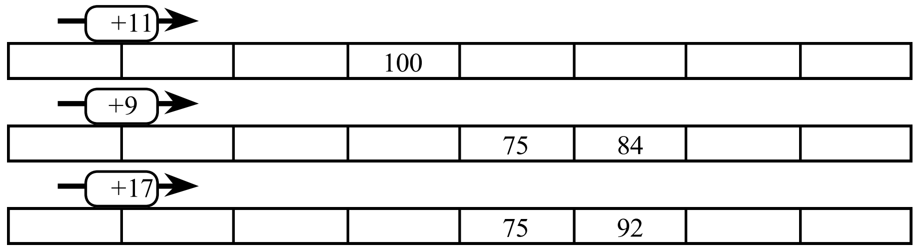


fig. 21

Dans le cas d’un opérateur additif « assez simple », il est probable que les enfants (CP, CE1) commencent par surcompter. Cependant quelques configurations particulières peuvent faire intervenir des « nombres amis » (37 —> 40). On voit ainsi que la démarche à utiliser n’est pas constante ; une composante *stratégique* intervient, en fonction des nombres en jeu. De plus la disposition des nombres de départ impose de procéder soit en croissant (+3), soit en décroissant (–3). Ainsi est renforcée la réciprocité addition–soustraction. La planche N donne une dizaine d’exemple, dont la complexité est en progression, entre CE1 et CM2.

Par ailleurs, la progression d’une suite d’exercices peut induire une démarche :

31 – 10 suivi de 31 – 9 invite à traiter cette dernière opération 31 – 10 + 1, c’est-à-dire à profiter de l’opération précédemment calculée (qui fonctionne alors comme relai).

Alors que 31 – 1 suivi de 31 – 4 peut inciter à traiter cette dernière opération : 31 – 1 – 3.

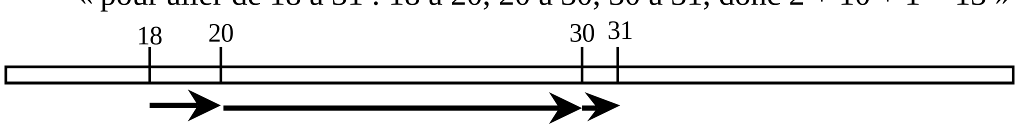
Il n’est sans doute pas souhaitable de faire apparaître trop vite une pluralité de démarches ou de représentations numériques : chacune d’elles demeurerait incertaine. Il est préférable de consolider une représentation ou une démarche sur une durée assez étendue, plutôt que d’en mettre plusieurs en concurrence. L’entraînement a pour effet de stabiliser les structures nouvelles, d’en automatiser l’exécution, de permettre leur intégration dans des structures plus complexes. C’est la raison pour laquelle les activités de calcul doivent être pratiquées souvent, mais selon des durées courtes, et une progression mesurée.

ETAPE 7 : STRATEGIES CLASSIQUES

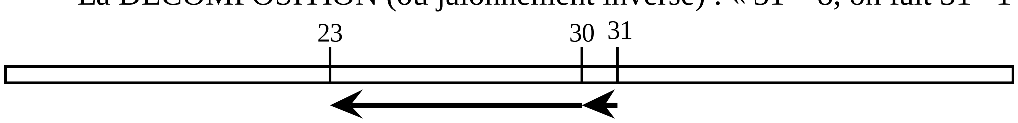
Retenons cinq méthodes principales :

Le JALONNEMENT :

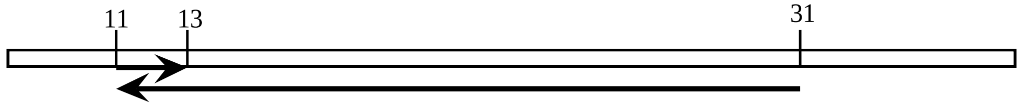
« pour aller de 18 à 31 : 18 à 20, 20 à 30, 30 à 31, donc 2 + 10 + 1 = 13 »



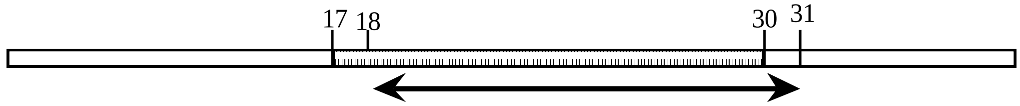
La DECOMPOSITION (ou jalonnement inverse) : « 31 – 8, on fait 31 –1 –7 »



Le PIVOTEMENT : « 31 – 18 = 31 – 20 + 2 »



Le DECALAGE : « 31 – 18 c'est comme 30 – 17 »



Le voisinage des doubles : « 25 + 27 c'est 25 + 25 + 2 » donc 50 + 2

Dans certains cas l'une de ces méthodes s'impose. Pour calculer 347 + 999, il est bien préférable de calculer 347 + 1000 – 1 que de calculer l'opération par écrit.

Dans d'autres cas, c'est beaucoup moins évident : pour calculer 4733 – 1797, on peut essayer de jalonner : 1797 ; 1800 ; 2000 ; 4000 ; 4700 ; 4733. Soit 3 + 200 + 2000 + 700 + 33 = 2936

Cet exemple montre que la difficulté d'un exercice provient de plusieurs facteurs :

• la simplicité des nombres (1000 est un grand nombre simple)

• la taille des nombres (269 est un plus petit nombre moins simple)

• la quantité d'éléments à mémoriser : Lorsque l'exercice est difficile, il ne faut pas surcharger la mémoire en faisant retenir l'énoncé ; celui-ci est écrit au tableau et l'on peut autoriser l'écriture de résultats intermédiaires (mais sans laisser poser l'opération), éventuellement laisser une graduation ou un tableau numérique affiché.

Autre exemple : On utilise un jeu de cartes comportant des nombres à 2 chiffres, comme celles-ci :

49 65 23 45 95 77 50 84

fig. 22

•Cet ensemble n'est évidemment pas limitatif. Il doit être gradué selon le niveau d'enseignement et la progression envisagée.

• Voici une règle possible. On convient de l'opération avant le tirage : additionner les deux ou soustraire le plus petit du plus grand ; puis on tire deux nombres, qui restent affichés.

Chacun propose, *non pas le résultat,* mais les étapes du calcul.

S'il s'agit d'additions, on peut également opérer un tirage sur un ensemble plus vaste, et poser trois ou quatre nombres. Exemple :

49 25 3 77

fig. 23

Le choix porte encore sur la démarche, en particulier sur les regroupements.
Ainsi : 77 + 3 = 80 ; 50 + 25 = 75 ; 80 + 75 = 155 ; 155 – 1 = 154

• Mais la présentation peut être également écrite :

$\boxed{25 + 36 + 7 + 15 + 9 + 13 =}$ $\boxed{7 - 15 + 27 - 35 + 47 =}$

$\boxed{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 =}$ $\boxed{4 + 27 + 31 + 13 + 35 =}$

$\boxed{75 + 56 + 34 + 66 + 125 + 114 =}$

LE CALCUL MULTIPLICATIF

ETAPE 3 : PRODUIT PAR DIX, CENT, MILLE

Le calcul multiplicatif débute avant la constitution du « répertoire » (Table de Pythagore), à propos de la numération.

Multiplier par dix c'est échanger chaque unité contre une dizaine :

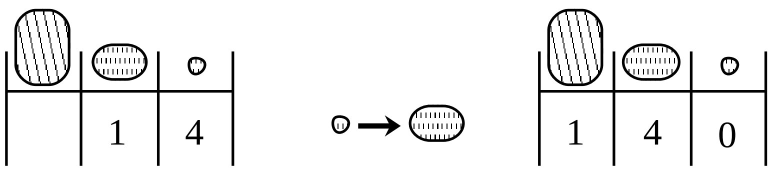


fig. 24

ETAPE 4 : DOUBLE ET MOITIE

Il est reconnu que les doubles sont plus aisément rappelés que les autres sommes, et que l'opérateur « doubler » est très vite perçu comme multiplicatif (cf. problème de l'agrandissement du puzzle).

Ceci peut donner lieu à des « rondes », qui sont en fait des calculs additifs :

• Les enfants sont interrogés l'un après l'autre, et chacun doit énoncer le double du nombre précédemment émis. Par exemple partant de 3 : 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, etc.

Les premiers éléments sont mémorisés, les suivants obtenus à partir de décompositions simples ($12 + 12 = 10 + 10 + 2 + 2$),… Plus loin, le « pivot » va intervenir : $96 + 96 = (100 – 4) + (100 – 4)$…

ETAPE 5 : TABLE DE PYTHAGORE

Les expérimentations font apparaître plusieurs résultats dont les conséquences pédagogiques sont assez claires :

• Les résultats multiplicatifs sont beaucoup moins *reconstruits* que *rappelés* (« par cœur »). L'entraînement répétitif est donc nécessaire, et pas seulement sur une période brève. La déperdition est limitée en cas de « sur-apprentissage », c'est-à-dire si la période d'entraînement est supérieure au strict minimum.

• Ces résultats étant essentiellement « déclaratifs », le risque *d'interférence* est plus grand que dans le cas de résultats reconstruits. On dit qu'il y a *interférence* lorsque plusieurs résultats voisins conduisent à des confusions (comme $7 \times 8 = 48$). Il est donc préférable d'éviter les apprentissages « en ligne » (table de N, puis table de N+1…), et de constituer des séquences d'apprentissages fréquentes, brèves, et *déconnectées* entre elles.

• Les interférences les plus fréquentes semblent mettre en jeu les nombres qui interviennent plus souvent dans la table (comme 36, 24, etc…). Il peut être en conséquence préférable de commencer par les nombres « rares ».

• Comme pour toute activité de mémorisation, le fractionnement est plus efficace que les séquences prolongées. Tous les phénomènes situés en périphérie du message (rythme, intonation, couleurs, associations diverses) favorisent la qualité de l'indexation, et par conséquent le rappel ultérieur.

La mémorisation de la Table est favorisée par des observations, coloriages, masques, comme indiqués plus haut pour la Table d'addition. Les observations sont plus nombreuses et variées : remarquer la régularité des chiffres d'unité dans une ligne, les répétitions (certains nombres, comme 49, figurent une fois, d'autres deux fois, ou bien trois fois, comme 36…).

On peut extraire un fragment, ou reconstituer une table dont lignes et colonnes sont en désordre, etc.

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

fig. 25 : Table de multiplication avec divers coloriages

Les tableaux suivants sont des tables de Pythagore dont les lignes et les colonnes sont en désordre, et certaines cases effacées. Il faut retrouver le contenu des cases vides, c'est-à-dire les en-tête de lignes et de colonnes :

	9		2	
54			18	
	72	64		56
42			14	
	90		20	

		12		
2		6		20
			12	
6		18		
	25		20	

24	36		8	
	18		4	
18		24		21
36			12	
	45			35

fig. 26 : Tables incomplètes

ETAPE 6 : CALCUL APPROCHE, ORDRE DE GRANDEUR

Mais c'est sans doute le calcul approché, ou l'estimation d'ordre de grandeur qui est le plus important pour le calcul multiplicatif, éventuellement le contrôle de vraisemblance d'un calcul écrit ou à la machine. Une première approximation est fournie par la règle des produits par 10, 100, 1000, dont on peut donner une image comme celle-ci :

	1	*10*	*100*	*1000*
10	dix	cent	mille	dix mille
100	cent	mille	dix mille	cent mille
1000	mille	dix mille	cent mille	un million

fig. 27 : tableau des ordres de grandeur

Au-delà, on procède par approximation plus fine, ou par compensation :

$543 \times 876 \cong 500 \times 900 = 450\ 000$ (compensation) ;

ou encore $351 \times 6 \cong 333 \times 3 \times 2 = 2\ 000$ (jalonnement par le millier).

ETAPE 7 : DECOMPOSITIONS MULTIPLICATIVES ET STRATEGIES DE CALCUL

On peut, partant de la Table, récapituler pour chaque nombre ses décompositions :

$$12 = 12 \times 1 = 6 \times 2 = 4 \times 3$$

Il est beaucoup moins banal d'exercer les décompositions multiplicatives (diviseurs) que les décompositions additives. Il est pourtant souhaitable de faire reconnaître pour chaque nombre une « physionomie » dûe à ses caractères de divisibilité.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
			2×2		2×3		2×4 2×2×2	3×3	2×5		2×6 3×4 2×3×2
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
	2×7	3×5	4×4 2×8 4×2×2 2×2×2×2		2×9 3×6 2×3×3		2×10 4×5 2×2×5	3×7	2×11		2×12 3×8 4×6 2×2×6 2×4×3 etc.

fig. 28 : Tableau des décompositions multiplicatives

Ceci permet d'imaginer de nouvelles démarches de calcul.

Exemple : $28 \times 35 = ?$ C'est $7 \times 4 \times 5 \times 7 = 7 \times (20) \times 7 = 49 \times 20 = 980$

Ou encore : $28 \times 35 = 14 \times 70 = 2 \times 7 \times 70 = 2 \times 490 = 980$

Bien entendu, les décompositions additives (et la distribution) sont les démarches les plus habituelles. Mais la décomposition « naturelle » (143 = 100 + 40 + 3) n'est pas toujours la plus judicieuse.

Exemple : $15 \times 12 = 150 + 15 \times 2 = 150 + 30 = 180$

Mais aussi : $15 \times 12 = 3 \times 5 \times 4 \times 3 = 20 \times 9 = 180$

ou encore : $15 \times 12 = (12 + 3) \times 12 = 144 + 36 = 180$

C'est sans doute plus évident pour $97 \times 15 = (100 - 3) \times 15 = 1500 - 45 = 1455$

Une séquence de calcul doit être courte, car elle demande beaucoup d'attention.

Elle doit contenir des exercices faciles au début, destinés à solliciter la mémoire et focaliser l'attention (par exemple ajouter 10, ou utiliser des compléments faciles), puis moins faciles, où les stratégies sont plus nombreuses.

Différentes modalités sont possibles, qui pourront varier en fonction du public, du niveau, du moment dans l'année ; elles portent sur la nature et la permanence du support. Exemples :

• L'énoncé de la question est seulement oral,

• Ou bien il est écrit au tableau ; il subsiste ou bien est effacé au bout de quelques instants.

• L'enfant écrit (ardoise) la réponse, ou bien l'énonce oralement.

• Il est autorisé non pas à écrire l'opération, mais des résultats intermédiaires.

• Il lui est possible de consulter visuellement une graduation ou bien un tableau numérique, ou même une table d'addition ou de multiplication.

• Ou encore l'énoncé est entièrement écrit.

Il est alors intéressant de faire décrire les stratégies utilisées, et les comparer. Ceci permettra d'espérer un enrichissement des procédures.

La séquence se termine par un exercice difficile, pour lequel l'objectif est moins d'obtenir un résultat que d'ouvrir un champ de réflexion.

BIBLIOGRAPHIE

BOULE F. Jeux de calcul, A.Colin, 1994

BOULE F. Le calcul mental à l'école (histoire, expérimentations, propositions), IREM de Bourgogne, 1998.

BRISSIAUD R. Comment les enfants apprennent à calculer, Retz, 1989

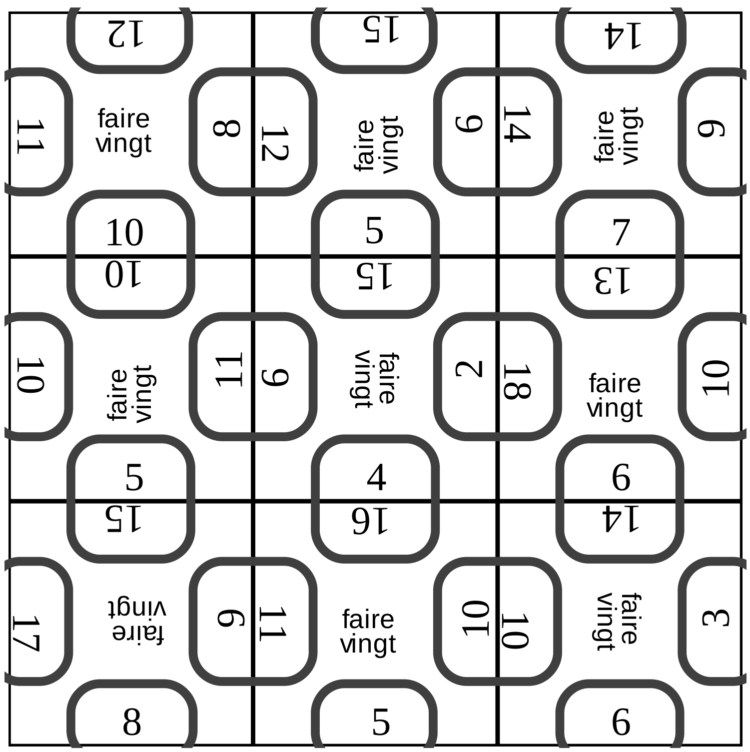
FAYOL M. L'enfant et le nombre, Delachaux et Niestlé, 1990 [en particulier, Chap 5 : L'emploi et la genèse des algorithmes]

KUNTZMANN J. Calcul mental de 10 à 90 ans, IREM de Grenoble, 1987

LETHIELLEUX C. Le calcul mental (2 vol), A.Colin, 1992

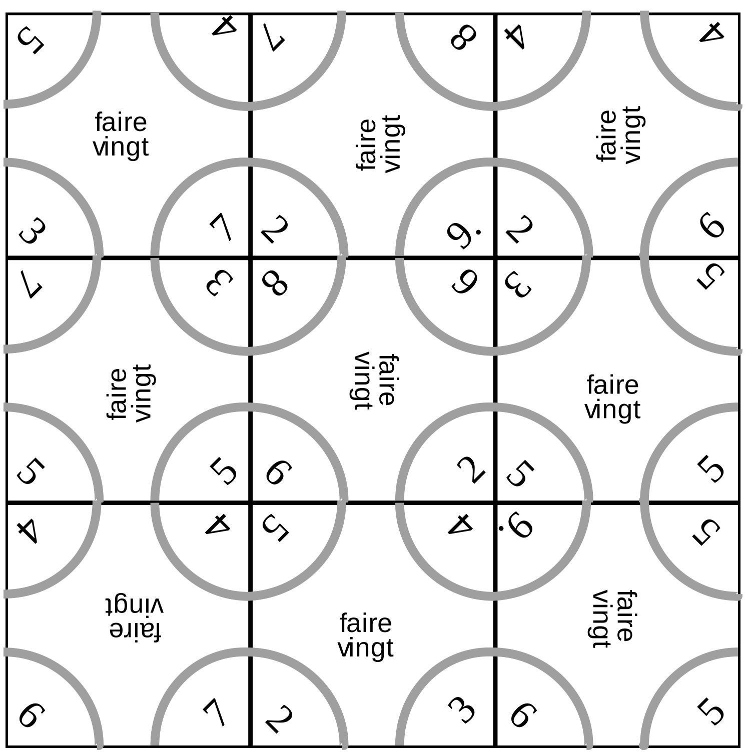
PORTAL M. Le Calcul mental, Aubanel, 1979.

ANNEXE



9 pièces
à découper

Disposer ces neuf pièces en un carré 3 ×3 de telle façon que les carrés totalisent 20



9 pièces
à découper

Disposer ces neuf pièces en un carré 3 ×3 de telle façon que les disques totalisent 20