CALCUL MENTAL, CALCUL RAPIDE

Denis BUTLEN
Monique PEZARD
École Normale de Melun

Nous décrivons ici une expérimentation portant sur des activités de calcul mental et qui s'est déroulée pendant une année scolaire, dans des classes du CP au CM_2.

POURQUOI LE CALCUL MENTAL ? NOS HYPOTHÈSES DIDACTIQUES

1. Le calcul mental nous semble un domaine privilégié pour tester les conceptions numériques des élèves et leur disponibilité

En effet, la nécessité de calculer rapidement amène les élèves à abandonner les algorithmes écrits, sûrs mais trop lents, et à mettre en œuvre des procédures révélatrices des conceptions qu'ils se font des nombres, ces conceptions étant liées à la numération décimale et aux propriétés des opérations (fonctionnant souvent de façon implicite). Prenons un exemple : 32×25.

Voici plusieurs types de calcul possibles :
$32 \times 25 = (30 + 2) \times 25 = 30 \times 25 + 2 \times 25$
$32 \times 25 = 32 \times (20 + 5) = 32 \times 20 + 32 \times 5$
$32 \times 25 = (8 \times 4) \times (5 \times 5) = (8 \times 5) \times (4 \times 5) = 40 \times 20$
$32 \times 25 = (8 \times 4) \times 25 = 8 \times (4 \times 25) = 8 \times 100$
$32 \times 25 = (32 \times 50) : 2 = 16 \times 50$
etc.

L'élève choisit telle ou telle procédure par un souci d'économie pouvant porter sur la mémoire, la disponibilité des décompositions, des nombres, sur la fatigue due aux calculs intermédiaires...

Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la disponibilité des décompositions additives et multiplicatives des nombres, notamment chez les élèves en difficulté.

2. Le calcul mental nous semble être un moment privilégié de l'apprentissage pour

- enrichir les conceptions numériques et leur domaine de disponibilité ;

«Grand N» n° 47 pp. 35 à 59, 1990-1991

- faire fonctionner et s'approprier les propriétés des opérations ;
- diversifier et étendre les procédures de calcul.

En effet les séances de calcul mental sont des temps de travail intensif :

- **d'un point de vue individuel** : les élèves travaillent vite, changent rapidement de techniques, sont amenés à en explorer de nouvelles ;
- **d'un point de vue collectif** : l'explicitation et la comparaison des différentes procédures créent dans la classe une dynamique favorisant une réelle émulation.

De plus, les activités de calcul mental s'avèrent, en général, motivantes.

Enfin le calcul mental peut être un lieu privilégié pour affiner certaines stratégies de résolution de problèmes. Nous le verrons dans le cas particulier du jeu de l'autobus.

3. Le maître a un rôle important à jouer dans la conduite des activités : en effet, celles-ci n'aboutissent à un réel apprentissage que si le maître s'attache à faire expliciter et comparer les procédures mises en œuvre par les élèves.

Nos objectifs de travail

Nous poursuivions un double objectif lors de cette expérimentation :

- d'une part, exhiber les conceptions des nombres chez les élèves du CP au CM_2, notamment chez ceux en difficulté ;
- d'autre part, nous voulions :
  • avoir une action sur ces conceptions, les enrichir, les diversifier et étendre leur domaine de disponibilité ;
  • parallèlement, avoir une action sur les procédures de calcul.

Le choix des activités

Nous avons travaillé à la fois sur les structures additives et multiplicatives. Nous exposerons d'abord les activités portant sur l'addition et la soustraction. Les activités portant sur la multiplication sont décrites dans la deuxième partie de l'article.

A - Calcul mental d'additions et de soustractions

Les différentes activités se sont déroulées dans plusieurs classes de la région parisienne et de la ville de Moulins (Allier) (1CP, $1CE_1$, $2CE_2$, $1CM_1$, $1CM_2$).

Durée des activités : les séances de calcul mental ont eu lieu environ 1 fois par semaine, pendant 45 minutes, tout au long de l'année scolaire.

Nous parlerons notamment :

- du jeu de l'autobus ;
- de compter et décompter de n en n, à partir d'un certain rang ;
- d'additions mentales.

I - LE JEU DE L'AUTOBUS

1. Présentation de l'activité

a) Enoncé standard et objectifs de l'activité

L'énoncé «standard» est le suivant : *«Dans un autobus il y a n voyageurs, à un arrêt il en monte a et il en descend b, combien y a-t-il de voyageurs après le départ de l'autobus ?»*.

Les travaux de G. Vergnaud sur les structures additives montrent, entre autres choses, qu'il y a deux types de procédures pour résoudre un problème de ce type :

- une procédure E portant sur les états qui revient à considérer un état initial E_1, à lui appliquer une transformation T_1 et à en déduire un état intermédiaire E_2, à appliquer à E_2 la transformation T_2 et en déduire un état final E_3 :

$$\begin{array}{ccccc} & T_1 & & T_2 & \\ E_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & E_3 \\ n & +a & n+a & -b & n'-b \\ & & n' & & n'' \end{array}$$

- une procédure T portant sur les transformations : elle revient à considérer un état initial E_1 (n voyageurs), à évaluer une transformation T_3 obtenue par composition des transformations T_1 et T_2 (a - b), à appliquer cette transformation à E_1 afin d'en déduire l'état final E_2 $n' = n + (a - b)$. Par le biais du calcul mental, notre but était de faire acquérir aux élèves la procédure T.

b) Les variables didactiques de la situation

- **Les variables numériques** : nous avons choisi de faire varier les données n, a et b sur trois domaines numériques :
  - le domaine D_1 défini par $n < 100$, $a < 10$ et $b < 10$;
  - le domaine D_2 défini par $n < 100$, $a > 10$ et $b < 10$;
  - le domaine D_3 défini par $n < 100$, $a > 10$, $b > 10$ et $|a - b| < 10$.

Dans les 3 cas n était nettement supérieur, en valeur absolue, à a et b.

Dans le cas des domaines D_1 et D_2, nous analyserons les résultats et procédures des élèves en fonction de l'existence ou non de ce que nous avons appelé «un passage à la dizaine», à savoir :

$$n + a - b = 22 + 9 - 3 = 31 - 3 = 28$$

par contre un calcul du type

$$27 - 4 + 3$$

ne présente pas de passage à la dizaine.

- **Les variables liées au contexte**

Nous avons proposé plusieurs types d'énoncés suivant les moments et les classes, afin de ne pas lasser les élèves ou afin de justifier les valeurs prises par les données numériques : jeux de billes avec pertes et gains, dans un train... (au lieu d'un autobus), jeu de la grand-mère (je suis à n pas de ma grand-mère, elle me dit d'avancer de a pas puis de reculer de b pas, où suis-je ?).

Les élèves dans chaque cas ont reconnu le même problème, ce ne sont que des changements de circonstance qui ont pour but de relancer l'activité et l'intérêt.

Nous avons également, et ceci systématiquement, proposé l'énoncé standard ou bien l'une des variantes exposées ci-dessous, en inversant les termes «montent» et «descendent», en prenant $a - b > 0$, $a - b < 0$ ou $a - b = 0$.

En fonction des niveaux de classes et des réussites à l'activité standard, nous avons proposé des questions intermédiaires qui avaient pour but de donner du sens à la tâche ainsi cela donnait les énoncés suivants :

«Dans un autobus il y a n personnes, il en monte a et descend b, après l'arrêt y a-t-il plus, moins, autant de voyageurs ?»

ou bien

«Dans un autobus..., après l'arrêt y a-t-il plus, moins, autant de voyageurs, combien en plus, ou combien en moins ?».

2. Analyse de la tâche

L'énoncé est donné oralement ; le nombre n est inscrit au tableau. Selon les cas, les élèves écrivent seulement le résultat ou bien doivent écrire un résultat intermédiaire afin d'expliciter leur démarche. Dans ce dernier cas, la tâche de l'élève, notamment le rapport à la mémoire, est changée.

Quelle que soit la procédure mise en œuvre, l'élève doit

- mémoriser les données intervenant dans le problème (n, a, b) ;
- traduire a et b en terme de transformation.

Dans le cas d'une procédure de type E, l'élève doit effectuer 2 calculs, mémoriser le résultat intermédiaire et donner le résultat final.

Dans le cas d'une procédure de type T, il doit

- mémoriser plus longtemps l'état initial n ;
- évaluer $a - b$, en déterminer le signe et le traduire en terme de transformation ;
- donner le résultat final.

La procédure de type T est plus complexe mais peut s'avérer plus efficace selon les valeurs numériques du problème.

Nous nous sommes attachés à :

- repérer en fonction des données numériques et de la familiarisation avec le problème les procédures de résolution des élèves ;
- évaluer l'évolution de ces procédures ;
- comparer suivant les niveaux de classe procédures et résultats.

3. Analyse des procédures

- Quand les nombres a et b sont inférieurs à 10 (domaine D_1), les élèves, quel que soit leur niveau, effectuent mentalement les opérations dans l'ordre proposé par l'énoncé (procédure de type E).

Seuls quelques élèves (en général les meilleurs) composent de façon systématique les transformations (2 élèves (sur 24) du CE_2 de Melun - 3 élèves (sur 18) du CE_2 de Moulins - 7 (sur 20) du CM_1 de Paris).

Les données de départ n'imposant pas une composition des transformations, la grande majorité des élèves ne voit pas la nécessité d'utiliser une procédure de type T, et ceci, même après explicitation.

Les procédures sont les mêmes dans le cas du domaine D_2.

- Quand les nombres a et b sont plus grands (avec $|a - b| < 10$) (domaine D_3), nous avons constaté que, dans les classes de CE_2, CM_1, CM_2, la procédure de type T se diffuse dans la classe et est adoptée par la quasi totalité des élèves (15 élèves (sur 18) du CE_2 de Moulins - 21 (sur 24) du CE_2 de Melun - la quasi totalité des élèves de CM_1 - la totalité des élèves de CM_2).

Ceux qui n'utilisent pas cette procédure sont des élèves très faibles.

Toutefois

- Les observations précédentes ne sont pas vérifiées au CE_1. A ce niveau, les élèves ne sont pas capables de composer les transformations.

Même une progression permettant de faire franchir les étapes une à une aux élèves s'avère difficile. (Demander s'il y a autant, plus, ou moins de voyageurs après l'arrêt - puis combien en plus, combien en moins...).

Nous n'avons pas disposé d'assez de temps pour connaître les réelles possibilités des élèves.

- Le fait de travailler dans le domaine D_3 (qui devrait inciter les élèves à composer les transformations) ne suffit pas à faire évoluer l'ensemble de la classe.

Une institutionnalisation des savoir-faire est nécessaire pour que la majorité des élèves adopte une procédure de type T. Celle-ci doit toutefois être précédée de plusieurs phases de recherche et de familiarisation avec le problème. Le maître a donc ici un rôle important à jouer pour faire évoluer les procédures.

Cela est particulièrement vérifié au CE_2 et au CM_1.

Au CM_2, les élèves adoptent très vite une procédure de type T.

4. Analyse des résultats

Lors de la première phase (domaines D_1 et D_2), nous constatons que les exercices sont mieux réussis :

- quand il n'y a pas de passage à la dizaine ;
- quand l'ordre des transformations est d'abord une addition, puis une soustraction ;
- quand a (nombre de voyageurs qui montent) est supérieur à b (nombre de voyageurs qui descendent).

De plus, quand n, le nombre de voyageurs de départ, est petit les élèves de bon niveau réussissent nettement mieux que les autres.

Lors de la deuxième phase (domaine D_3), au début, nous avons observé un fléchissement des réussites, sans doute dû au fait que peu d'élèves composaient les transformations (les calculs étaient plus complexes que dans les domaines D_1 et D_2).

Puis, au fur et à mesure du déroulement des séances, le pourcentage de réussite s'est amélioré pour se stabiliser, par exemple au CE_2 et au CM_1, aux alentours de 60 %.

De façon générale, les performances des élèves à ce type d'activité sont semblables à celles enregistrées dans l'ensemble des mathématiques.

Les erreurs les plus fréquentes. Les erreurs proviennent principalement :
- d'une difficulté à mémoriser toutes les données ;
- d'une difficulté à évaluer le signe de la transformation composée (alors que l'écart $|a - b|$ est souvent correctement évalué).

Cette difficulté est renforcée lorsque le signe de la transformation est négatif, ou lorsque le nombre de voyageurs qui descendent est donné en premier.

II - AUTRES ACTIVITÉS ADDITIVES

Nous allons décrire 2 types d'activités :
1. compter, décompter de n en n ;
2. additions mentales.

Méthode de travail

1. Pour l'activité «compter, décompter de n en n», il s'agit :
- soit d'un **travail individuel sur fiche** : le premier nombre est écrit sur une fiche ; l'élève doit compter ou décompter de n en n à partir de ce nombre ;
- soit d'un travail collectif oral : le maître interroge les élèves à tour de rôle dans un ordre quelconque - un secrétaire note la suite des résultats.

Pour maintenir un certain rythme, on ne s'arrête pas s'il y a une erreur : elle sera corrigée à la fin de l'exercice.

Remarque

Le travail individuel sur fiche permet une évaluation plus précise des performances de chaque élève ; mais il risque d'être un obstacle au développement de stratégies de calcul mental : en effet, quand ils écrivent les nombres, les enfants, ayant un support écrit, ont plus tendance à utiliser mentalement l'algorithme écrit (c'est-à-dire à «poser l'opération dans la tête»), plutôt que de rechercher de nouvelles techniques mentales - si on veut faire apparaître ces dernières, il faut donc privilégier le travail collectif oral.

2. La remarque est valable pour les additions mentales : les exercices proposés doivent être uniquement oraux : en effet, si les nombres sont écrits sur une feuille ou au tableau, il suffit aux élèves de réinvestir la technique écrite pour trouver le résultat.

Alors que, si l'exercice est proprement oral, la technique écrite, qui nécessite de nombreuses mises en mémoire, n'est guère performante. L'élève est amené à rechercher de nouvelles procédures mentales.

Exercices préparatoires

Pour amener les élèves à utiliser des techniques propres au calcul mental, on peut proposer des exercices préparatoires de calcul rapide (par écrit et individuellement).

Exemple : 37 + 28.

En calcul mental, on peut envisager 2 stratégies :
1. Décomposer additivement l'un des nombres et ajouter d'abord un nombre entier de dizaines :

$$(37 + 20) + 8 \quad \text{ou} \quad (30 + 28) + 7.$$

2. Décomposer additivement l'un des nombres pour arriver à la dizaine supérieure et ajouter le complément :

$$(37 + 3) + 25 \quad \text{ou} \quad (28 + 2) + 35.$$

Cette dernière stratégie suppose une bonne connaissance des compléments à 10 ou à la dizaine supérieure.

Exemples d'exercices préparatoires

a) Trouver le complément à 10 ou à la dizaine supérieure :

6 + ... = 10 ; 36 + ... = 40 ;
66 + 4 = ... ; ... + 4 = 50.

b) Ajouter 10 ou un nombre entier de dizaines :

37 + 10 = ... ; 43 + ... = 63 ; ... + 20 = 79 ;
30 + ... = 76 ; ... + 234 = 254.

c) Trouver le plus rapidement possible le résultat d'une addition à plusieurs termes (les nombres sont dans ce cas écrits au tableau)

27 + 15 + 4 + 3 + 5 ; 23 + 28 + 17 + 2 + 12.

Les élèves ont alors intérêt à utiliser les groupements amenant à un nombre entier de dizaines.

d) Décomposer additivement l'un des nombres en nombre entier de dizaines et nombre d'unités.

27 + 16 = 37 + ...   21 + 35 = 51 + ...

Remarque

Il faudra alors expliciter : 37 provient de (27 + 10) comme 16 = 10 + 6, il reste à ajouter 6.

e) Décomposer additivement l'un des nombres pour aller à la dizaine supérieure :

$15 + 7 = 20 + \ldots$; $27 + 16 = 30 + \ldots$; $29 + 18 = 30 + \ldots$

Là aussi, il faudra expliciter : 30 provient de 27 + 3 comme 16 = 3 + 13, il reste à ajouter 13.

1. COMPTER - DÉCOMPTER DE N EN N

Au CE_1, les valeurs prises par n sont $2 \leq n \leq 11$.
Au CE_2 et au CM_2, les valeurs prises par n sont $2 \leq n \leq 20$.

1. Analyse des procédures observées chez les élèves

Au CE_1 : on observe essentiellement 2 types de procédures :

- **P_1** : procédure de comptage (ou décomptage) «un à un» : elle consiste à «compter tout bas» (n - 1) termes et à écrire le $n^{ième}$ - Elle est souvent accompagnée d'un comptage sur les doigts.

- **P_2** : application mentale de l'algorithme écrit : les élèves «posent l'opération dans la tête».

Dans la classe de CE_1 où nous avons travaillé, aucun élève n'utilise une décomposition additive de n : il semble que ces décompositions, pourtant travaillées dès le cours préparatoire, ne soient pas reconnues par la suite comme des outils et restent donc indisponibles.

Au CE_2 : outre les procédures P_1 et P_2 décrites précédemment (P_1 est plus rare au CE_2 et s'observe surtout chez les élèves en difficulté), on observe des procédures (P_3) faisant intervenir des décompositions additives ou soustractives de n qui sont surtout utilisées pour les valeurs de $n > 11$ (n = 12, 14, 15, 17, 18 ...).

On trouve 2 types de décomposition :
- la décomposition canonique : 12 = 10 + 2 ; 14 = 10 + 4 ;
- d'autres décompositions permettant d'aller à la dizaine supérieure ou de simplifier les calculs :

23 + 12 = (23 + 7) + 5	(12 = 7 + 5)
21 + 14 = 20 + 15	(14 = 15 - 1)
28 = 15 = (28 + 20) - 5	(15 = 20 - 5)

Les dernières décompositions sont d'ailleurs proposées par les meilleurs élèves.

Lors du décomptage de n en n (même pour $n < 10$) :
En effet, l'application mentale de l'algorithme écrit de la soustraction étant plus complexe, le décomptage oblige davantage les élèves à utiliser des décompositions additives ou soustractives de n.

32 - 8 = (32 - 2) - 6	(8 = 2 + 6)
45 - 17 = (45 - 15) - 2	(17 = 15 + 2)
44 - 18 = (44 - 20) + 2	(18 = 20 - 2)

Cette dernière décomposition soustractive est d'ailleurs source d'erreurs, les élèves effectuant (44 - 20) - 2 plutôt que (44 - 20) + 2.

Au CM : on observe essentiellement des procédures de type P_2 et P_3.

De plus, à tous les niveaux, les élèves sont capables de repérer des régularités dans la suite des chiffres des unités ou des dizaines, puis d'utiliser ces régularités pour poursuivre le comptage (ou décomptage).

Cela est particulièrement vérifié pour n = 9, 10, 11.

2. Quelques résultats et erreurs aux différents niveaux

Au CP : si compter de 1 en 1 ne pose pas trop de problèmes, il n'en va pas de même pour décompter : les erreurs observées sont nombreuses :

- lors d'un changement de dizaine :

exemple : 30 - 20 ; 31 - 29 ; 23 - 20 - 10 ;

- erreur sur le chiffre des dizaines :

exemple : 29 - 18 ; 25 - 14 ; 29 - 9 ;

- compter au lieu de décompter ;
- compter de 2 en 2 (confusion avec l'exercice précédent).

Les premiers résultats ne sont pas très bons, mais après plusieurs séances d'entraînement, on note un progrès certain :

exemple : décompter de 78 à 45 :

- 10 enfants réussissent (sur 15) ;
- 1 enfant va jusqu'à 56 ;
- 2 vont jusqu'à 45 avec 1 erreur ;
- 1 va jusqu'à 72 puis saute à 30 - 39 - 38 - 37 ... ;
- 2 enfants écrivent très peu de termes (3 termes et 10 termes).

Ces trois derniers élèves ont par ailleurs beaucoup de difficultés en mathématiques.

Pour le comptage de 2 en 2, les erreurs sont du même type que pour décompter.

Pour l'ensemble des exercices, un apprentissage régulier amène à des résultats satisfaisants.

Au CE_1 : compter, décompter de 10 en 10 est assez bien réussi mais pour n = 11, on observe beaucoup d'erreurs.

De façon générale, les enfants éprouvent beaucoup plus de difficultés pour décompter que pour compter. Ils sont plus lents et font plus d'erreurs. Nous avons pu le constater à tous les niveaux du CP au CM_2.

Au CE_2 :

a) $\boxed{\textbf{pour n < 10}}$ Pour n = 3 ou 4, le comptage est bien réussi, mais lors du décomptage, 50 % des enfants font des erreurs.

- Plus n augmente (n = 8 par exemple), plus il y a d'erreurs.
- Pour n = 9, l'utilisation de la décomposition 9 = 10 - 1 conduit à des erreurs lors du décomptage : les enfants font -10 - 1.

On retrouve d'ailleurs ce type d'erreur pour des valeurs de n plus grandes (n = 18 = 20 - 2 par exemple).

- Décompter de 3 en 3 : exemples d'erreurs observées :
  - erreur sur le chiffre des dizaines : 31 - 18 ;

• enlever 2 (ou un autre nombre) à un moment : l'erreur devient périodique :

62 - 60......42 - 40......22 - 20......

62 - 58......52 - 48......42 - 38......

ou bien

• ajouter 3 ;
• décomposer de 4 en 4 ;
• autres exemples :
1) 59 - 58 - 55 -50 -48 - 45 - 40 - 38 - 35 - 30 ..., on observe une périodicité ;
2) ... 68 - 67 - 65 - 62 - ...

b) **pour n > 10**

- Lors du comptage de n en n, le pourcentage d'erreurs varie de 5 % à 50 %, avec une moyenne d'environ 25 %.
- Le pourcentage d'erreurs est plus important pour le décomptage de n en n : il se situe autour de 35 %.

Quelques erreurs observées

- Oubli d'une opération.

Exemple : pour ajouter 10 + a : ajouter seulement 10 ou ajouter seulement a ;
pour enlever 10 + a : enlever seulement 10 ou enlever seulement a.

- Le chiffre des unités est juste, mais il y a erreur sur celui des dizaines ou l'inverse : en particulier, le cas d'un nombre à 3 chiffres avec 0 comme chiffre des dizaines est davantage source d'erreurs.

• Erreur sur le chiffre des centaines seulement.
• Cas particuliers :
enlever 22 au lieu de 18 (18 = 20 - 2) ;
enlever 27 au lieu de 13 (13 = 20 - 7).

Dans la classe de CE_2 de Moulins, il faut noter la bonne performance d'un élève de niveau jugé passable et d'un élève en difficulté.

Au CM_2 : le résultat le plus remarquable est la très grande disparité entre les élèves. Pendant le même temps, certains écrivent 4 ou 5 termes pendant que d'autres plus de 30 ! (Il s'agissait d'un travail individuel écrit).

2. ADDITIONS MENTALES

Au CE_1 et CE_2, nous avons travaillé sur des nombres à 2 chiffres.

Au CM_1 et CM_2, nous avons travaillé sur des nombres à 2 chiffres ou à 3 chiffres.

Les additions comportent seulement 2 termes et sont uniquement mentales.

Procédures utilisées par les élèves

- Dans la classe de CE_1, il a été très difficile, voire impossible, de faire adopter aux enfants des stratégies de calcul mental différentes de celles qui consistent à «poser l'opération dans la tête» ; seul le meilleur élève semble comprendre que pour calculer 29 + 17 par exemple, on peut se ramener à 30 + 16.

Il faut tout de même noter que la technique écrite utilisée mentalement peut être performante : si le temps laissé est suffisamment long, le pourcentage de bonnes réponses est de l'ordre de 80 %.

- Les procédures utilisant des décompositions (additives ou soustractives) ne sont apparues qu'au CE_2 et au CM.

exemple : 35 + 27 = (35 + 20) + 7 ou 49 + 24 = 50 + 23 = 73.

Les élèves se rendent alors vite compte que cette méthode est plus fiable que l'algorithme écrit et l'utilisent en majorité.

3. CONCLUSION

Lors des deux types d'activités décrites ici, les procédures utilisées par les élèves sont diverses et relèvent un saut qualitatif entre le CE_1 et le CE_2 : en effet, à partir du CE_2, les enfant abandonnent les techniques plus «primaires» de comptage «pas à pas» ou «dans la tête» pour mettre en œuvre des techniques utilisant des décompositions additives ou soustractives des nombres.

Cette évolution est sans doute due à une meilleure connaissance du répertoire additif.

Une fois encore, on constate que ce sont les meilleurs élèves qui proposent plusieurs procédures et qui sont capables d'en changer «comme ça les arrange» selon les données numériques.

Le maître a un rôle très important à jouer dans l'explicitation des procédures utilisées par les élèves. En effet, ce sont en général les plus faibles qui utilisent des techniques «primaires» ; par contre, ce sont les meilleurs qui proposent des techniques plus économiques, mettant en jeu des décompositions.

Le rôle du maître est de favoriser la diffusion de ces nouvelles procédures à toute la classe : cela devrait amener les élèves en difficulté à abandonner leurs anciennes procédures pour en adopter de nouvelles, plus performantes.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'analyse des différentes activités de calcul mental portant sur les structures additives révèle un saut qualitatif entre les niveaux CP - CE_1 et CE_2 - CM - les résultats rejoignent les conclusions d'autres travaux de recherche sur ce sujet. (M. Fayol)*

En ce qui concerne les élèves en difficulté, nous avons constaté un décalage dans le temps de la disponibilité des décompositions additives : certains élèves faibles du CM mettent en œuvre des procédures primitives (énumération, opération dans la tête)

* Voir bibliographie.

parfois de façon durable, analogues à celles qui sont utilisées par une majorité d'élèves de CE_1.

Ce résultat se vérifie aussi pour le jeu de l'autobus où les élèves faibles ont du mal à composer les transformations.

Les élèves qui ont des difficultés en calcul mental sont les mêmes que ceux qui ont des difficultés en mathématiques en général : au début de l'expérience, ces élèves ne peuvent mettre en œuvre qu'un seul type de procédure (voire aucune). Toutefois, des procédures diverses peuvent se diffuser lorsqu'elles sont reconnues comme efficaces. Le maître a ici un rôle fondamental à jouer dans la gestion des activités pour que cette diffusion ait lieu.

B - Calcul mental de produits et résolution de problèmes multiplicatifs au CM_2

Nous décrivons ici la deuxième partie de l'expérimentation qui s'est déroulée pendant environ 6 mois dans une classe de CM_2 d'Antony.

Nous avons travaillé dans deux directions :

a) Poursuite des activités de calcul mental : nous nous sommes intéressés cette fois-ci au calcul mental de produits.

Comme pour les additions et les soustractions, notre objectif était double :

1. mettre en évidence les différentes conceptions des nombres chez des élèves de CM_2, ainsi que leur disponibilité dans les calculs proposés ;
2. agir sur ces conceptions et les faire évoluer.

Nous nous sommes particulièrement intéressés :

- aux décompositions multiplicatives liées à l'associativité de la multiplication ;
- à l'évolution des procédures de résolution en fonction de la taille des données numériques.

b) Résolution de problèmes multiplicatifs liés à la combinatoire

A l'origine de ce deuxième volet du travail, la question était de savoir si le calcul mental peut être une aide à la résolution de problèmes : en particulier, un apprentissage avec de «petits nombres» peut-il déboucher sur une meilleure compréhension du problème ?

Quels seraient a priori, les avantages des «petits nombres» ?

1. Avec de «petits nombres», l'élève peut plus facilement représenter le problème (par exemple, dans le cas de problèmes de combinatoire, il peut utiliser des arbres ou des ébauches d'arbres, des tableaux...).

Il peut même établir la liste exhaustive de tous les cas.

Nous faisons l'hypothèse que les «petits nombres» permettent de donner du sens à des problèmes complexes. Toutefois, les stratégies qu'ils induisent ne sont pas forcément pertinentes pour des nombres plus grands.

En particulier, dans des problèmes de dénombrement, l'énumération systématique de tous les cas, liée à une représentation complète du problème peut entraîner un blocage lors du passage à des nombres plus grands (une représentation complète sous forme, par exemple d'arbre ou de tableau, n'est alors plus possible).

Cette hypothèse nous a amenés à tester la résistance de procédures et représentations élaborées avec de «petits nombres» lors du passage à des nombres plus grands.

2. Avec de «petits nombres», le recours au calcul mental est plus simple et plus rapide. L'élève peut ainsi explorer dans un temps assez bref différentes voies permettant de résoudre le problème. Cette phase de tâtonnement, utilisant le calcul mental, peut être déterminante pour trouver la (ou les) procédures de réussite.

3. La résolution de problèmes est une activité complexe qui passe aussi par l'utilisation de la mémoire : les travaux des psychologues (J.F. Richard)* ont montré que la mémoire de travail (ou mémoire à court terme) est limitée, a fortiori chez les enfants, et «qu'il y a concurrence entre les activités de stockage de l'information et les activités de traitement».

L'exercice d'activités cognitives non automatisées est très coûteux mentalement et peut donc perturber les possibilités de mémorisation des enfants.

En se limitant à des calculs sur des «petits» nombres (le plus souvent automatisés et donc peu coûteux), on peut espérer libérer de «l'espace mental» pour la compréhension de la structure du problème.

Choix des activités

a) En calcul mental, nous avons proposé uniquement des produits de 2 facteurs, en faisant varier la taille de ces facteurs.

b) En relation avec le calcul mental de produits, notre choix a porté sur des problèmes multiplicatifs, en particulier faisant intervenir le produit cartésien de 2 ou 3 ensembles.

Méthode de travail

Les séances ont eu lieu 1 fois par semaine pendant 6 mois. En général, la séquence était divisée en 2 parties :

- une consacrée au calcul mental de produits (1/2 h) ;
- l'autre à la résolution de problèmes multiplicatifs (1/2 h).

Pour le calcul mental, nous avons adopté la méthode suivante.

---

* Voir bibliographie.

1. Calculs de produits avec au moins un facteur à un chiffre : les élèves inscrivent leurs résultats sur une ardoise et explicitent oralement leurs méthodes de calcul.

2. Calculs de produits faisant intervenir 2 facteurs à 2 chiffres : les élèves disposent d'une feuille de papier pour inscrire leurs résultats et si besoin, leurs calculs intermédiaires. Mais en aucun cas, ils ne doivent poser l'opération.

Calcul mental de produits

1. Analyse a priori

Nous avons distingué, selon la taille des nombres, 2 types de produit :

a) $n \times n'$ ou $n' \times n$ avec $\begin{cases} n' : \text{nombre à 1 chiffre} \\ n : \text{nombre à 2 chiffres} \end{cases}$

b) $n \times n'$ ou $n' \times n$ avec $\begin{cases} n' : \text{nombre à 2 chiffres} \\ n : \text{nombre à 2 chiffres} \end{cases}$

En effet, dans le cas a), l'utilisation mentale de l'algorithme écrit reste performante alors qu'elle ne l'est plus du tout dans b).

Dans ce dernier cas, les élèves sont contraints à trouver des procédures de calcul différentes de celle du calcul écrit.

Dans le cas a), elle est plus intéressante par rapport à n.

Dans le cas b), cela dépend de la valeur de n et de n'.

Exemple 74×15 il semble plus intéressant de calculer $74 \times 10 + 74 \times 5$ plutôt que $15 \times 70 + 15 \times 4$, mais pour 17×12 il est sans doute plus facile de calculer $17 \times 10 + 17 \times 2$.

La double distributivité est une procédure complexe, qui ne peut apparaître que si l'élève peut garder des traces écrites de ses calculs intermédiaires (ce qui est le cas dans la classe où nous avons travaillé). Sinon, elle nécessite trop de mises en mémoire pour être performante dans un calcul purement mental.

Cas a) : les valeurs proposées pour n' sont 2, 4, 5, 7, 8, 9.

4 et 9 sont des valeurs particulières.

Pour $n' = 4$ on peut utiliser l'associativité de la multiplicité liée à la décomposition $4 = 2 \times 2$.

Pour $n' = 9$ la décomposition $9 = 10 - 1$ est performante.

Pour $n' = 5$ la décomposition $5 = 10 : 2$ est intéressante dans la plupart des calculs.

Cas b) : les valeurs proposées pour n' sont 20, 30, dizaine entière, puis 11, 15, 25, 22, 33.

Les valeurs sont intéressantes pour les décompositions additives ou multiplicatives associées.

$n' = 11$: la décomposition $11 = 10 + 1$ est performante.

$n' = 15$: la décomposition $10 + (10 : 2)$ est intéressante dans beaucoup de calculs : exemple, $36 \times 15 = 360 + 180 = 540$. On peut aussi utiliser : $15 = 30 : 2$.

n' = 25 : il y a plusieurs décompositions multiplicatives associées $25 = 5 \times 5$; $25 = 50 : 2$; $25 = 100 : 4$.

De façon générale, l'utilisation de décompositions multiplicatives peut être performante lorsque l'on multiplie un nombre pair par un multiple de 5 :

$$2n \times 5n' = 10 \times nn'.$$

Exemple : $35 \times 16 = (7 \times 5) \times (2 \times 8) = 560.$
10

Dans la pratique, cela revient à multiplier par 2 le multiple de 5 et diviser par 2 le nombre pair : $35 \times 16 = 70 \times 8 = 560$.

n' = 22 ou n' = 33 l'utilisation de l'associativité de la multiplication liée à la décomposition $22 = 11 \times 2$ (ou $33 = 11 \times 3$) est intéressante en calcul mental.

Remarque

Il n'est pas toujours facile de déterminer lors d'un calcul avec traces écrites, s'il y a eu utilisation d'une telle décomposition ou simplement de la distributivité.

Exemple $22 \times 56 = 1\,120 + 112$ peut s'interpréter :

$(56 \times 20) + (56 \times 2)$ (distributivité/22)

ou bien $(56 \times 2) \times \underbrace{(11)}_{10+1}$ (utilisation de $22 = 2 \times 11$)

2. Analyse des procédures

Dans la classe de CM$_2$ où nous avons travaillé, les procédures effectivement utilisées par les élèves sont :

Lors de la première phase a)

1. l'addition réitérée : $n \times n' = \underbrace{n + n + \ldots + n}_{n' \text{ fois}}$.

Elle est très utilisée dans le cas où n' = 2. Elle se réduit alors à la recherche du double.

2. la distributivité simple par rapport à n.

Exemple : $3 \times 17 = (3 \times 10) + (3 \times 7) = 30 + 21 = 51$.

Remarque : on trouve aussi (c'est beaucoup plus rare) la distributivité par rapport à n'.

Exemple : $32 \times 5 = (32 \times 2) + (32 \times 3)$.

3. l'algorithme écrit utilisé mentalement.

4. l'utilisation de l'associativité de la multiplication (par exemple : $n'=4=2\times2$). En fait, cette procédure est très peu utilisée. Quand elle existe, c'est plutôt sous la forme «calcul du double du double» avec l'addition

Exemple : 16×4 : $16 + 16 = 32$ $\quad 32 + 32 = 64$

ou bien $\quad 16 \times 2 = 32$ $\quad 32 + 32 = 64$

5. la distributivité simple par rapport à n', qui est décomposé par référence à la dizaine supérieure.

Exemple : n' = 9 = 10 - 1.

Dans la classe où nous avons travaillé, cette procédure n'a pas été majoritaire au départ (les élèves utilisaient mentalement l'algorithme écrit). Ce n'est qu'après explicitation et discussion qu'elle a été adoptée par la majorité de la classe.

Pour n' = 4, 5 ou 7 c'est la procédure 3 qui était largement majoritaire, du moins tant que les calculs étaient oraux. Si la maîtresse demandait aux élèves d'expliciter par écrit leurs calculs, alors la procédure 2 devenait majoritaire.

Lors de la deuxième phase b)

On retrouve les mêmes procédures que lors de la première phase a). La distributivité simple peut s'appliquer par rapport à n ou à n', les décompositions additives correspondantes pouvant être de plusieurs types.

Exemple : 78 = 70 + 8 ; 78 = 60 + 18 ; 78 = 75 + 3.

Il faut ajouter à la liste précédente :

6. la double distributivité.

Exemple : $36 \times 15 = (30 \times 10) + (30 \times 5) + (6 \times 10) + (6 \times 5)$.

7. la persistance d'un facteur (source d'erreur).

Exemple : 11×12 : $120 + 11 = 131$

15×12 : $150 + 15 = 165$.

La demande du maître d'expliciter par écrit les calculs intermédiaires amène les enfants à rechercher le plus possible de méthodes différentes. Dans la classe où nous avons travaillé, nous avons observé une très grande diversité de procédures.

Lors de cette seconde phase, la procédure 1 n'apparaît presque plus, de même pour la procédure 3 (elle nécessite alors trop de mises en mémoire).

En fait, ce sont les procédures de type 2 (utilisant la distributivité) qui sont majoritaires.

L'utilisation de la double distributivité devient importante lorsque les 2 facteurs sont des nombres à 2 chiffres, dont l'un est supérieur à la trentaine. Mais elle est mal maîtrisée et donc source d'erreurs.

- La distributivité simple avec décomposition soustractive est présente à chaque résolution d'exercice.

Son emploi est le fait de quelques élèves, mais ce ne sont pas toujours les mêmes ; le plus souvent, il est lié à la volonté de recherche d'autres méthodes de calcul.

- Si l'on excepte les cas n' = 4 et n' = 10 ou 30, ..., les décompositions multiplicatives n'apparaissent pas naturellement, mais seulement après intervention de la maîtresse. Même dans les cas où elles pourraient être performantes (n' = 22 ou 25 ou 33...), elles sont très minoritaires.

Il en est de même pour les décompositions faisant intervenir un quotient (n' = 25 = 50 : 2 = 100 : 4) : la décomposition 5 = 10 : 2 est apparue une seule fois, lors d'une recherche.

L'utilisation de 15 = 10 + (10 : 2) n'est jamais apparue.

Il semble donc que les écritures multiplicatives sont très peu disponibles chez les élèves de la fin du cycle primaire.

En fait, ces résultats peuvent s'expliquer : la distributivité simple additive combine d'une part la vision de la multiplication comme addition réitérée, d'autre part la décomposition décimale des nombres qui est à la base de la technique écrite.

Elle est donc facile d'accès. De plus, contrairement à la distributivité double, elle est directement utilisable de manière fiable.

Tout cela explique son succès et son renforcement comme stratégie dominante au cours des exercices.

Par contre, les décompositions multiplicatives n'ont pas la même généralité d'emploi. De plus, les opérations qui justifient leur efficacité ne sont pas toujours les plus pratiquées par les élèves.

Ainsi, on peut «sortir des tables» (par exemple 33 = 3 × 11) ou bien utiliser la division (exemple : 25 = 100 : 4).

Enfin, alors que la distributivité simple peut être «automatisée», il n'en est pas de même pour les décompositions multiplicatives où l'élève doit à chaque fois «inventer». Pour promouvoir ces dernières, il est donc nécessaire de prévoir un apprentissage spécifique.

c) Résolution de problèmes multiplicatifs

Notre objectif principal était de mettre en évidence des relations entre calcul mental et calcul écrit. En particulier, nous voulions vérifier l'hypothèse suivante.

Dans quelles conditions un élève susceptible de résoudre mentalement (ou d'entamer une recherche mentale) un problème multiplicatif dont les données numériques sont «petites», est-il capable d'aborder (voire de résoudre) un problème du même type où interviennent des données numériques plus grandes ?

Cela nous a conduit à tester le domaine de validité de certaines procédures et de certaines conceptions mises en œuvre lors de cette résolution mentale.

Problèmes multiplicatifs et produit cartésien

Nous avons choisi des problèmes faisant intervenir le produit cartésien de 3 ensembles :

- trouver tous les menus que l'on peut composer avec 3 types de plats ;
- trouver toutes sortes de quilles que l'on peut construire avec 3 types de matériaux...

etc.

Autres problèmes de combinatoire

- Dans un championnat de football, il y a 20 équipes. Chaque équipe rencontre les autres 2 fois (match aller - match retour). Combien de matchs sont ainsi disputés ?
- 5 personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien de poignées de mains sont ainsi échangées ?... etc.

1. Problèmes multiplicatifs et produit cartésien

Nous avons proposé aux élèves de calculer le cardinal du produit cartésien de 3 ensembles finis A, B, C.

Nous avons défini 2 domaines numériques :
- le domaine D_1 : les cardinaux des ensembles A, B et C sont tous compris entre 2 et 5.
- le domaine D_2 : les cardinaux sont compris entre 6 et 30.

Voici 2 exemples d'énoncé.

1. Un marchand de jouets veut fabriquer des quilles :
- la tête peut être ronde ou carrée ;
- elles peuvent être rouges, bleues, jaunes ou vertes ;
- elles peuvent être en plastique, en bois ou en terre cuite.

Combien de sortes de quilles le marchand pourra-t-il fabriquer ?

2. Les menus : combien peut-on composer de menus différents comprenant une entrée, un plat et un dessert choisis dans des listes précises ?

a) Analyse de la tâche de l'élève

Quel que soit l'énoncé proposé, l'élève est confronté à une structure multiplicative.

Il peut élaborer différents types de représentations de la situation :
- représentation en arbre ;
- diagramme sagittal ;
- tableau cartésien (un ou plusieurs) ;
- liste exhaustive plus ou moins organisée à partir d'un codage littéral ou chiffré.

Suivant la représentation adoptée et son état d'élaboration, les élèves peuvent :
- dans le cas d'une recherche exhaustive, dénombrer sans passage par une multiplication le nombre de solutions ;
- ou bien traduire la solution en terme de produits.

On peut distinguer alors 2 types de stratégies.

1. Calcul direct du produit $\overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{B}} \times \overline{\overline{C}}$ ne signifiant pas de facteurs particuliers*.
2. Calcul de produits intermédiaires $(\overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{B}}) \times \overline{\overline{C}}$ ou $\overline{\overline{A}} \times (\overline{\overline{B}} \times \overline{\overline{C}})$.

---

* $\overline{\overline{A}}$ désigne le cardinal de A.

b) Déroulement de l'expérience

L'expérience s'est faite en 3 phases.

Première phase : la maîtresse propose le problème des menus (domaine D_2).

Devant l'échec systématique des élèves (aucun résultat juste ; peu de représentations adéquates) la maîtresse conduit un premier bilan. Elle fait comparer les tentatives de calculs et les essais de représentations et demande aux élèves d'essayer de «dessiner» et de trouver le nombre de menus différents que l'on peut composer avec l'entrée «carottes».

Il y a ensuite relance de la recherche et comparaison des productions lors d'un second bilan.

Deuxième phase : la maîtresse propose un problème du même type relevant du domaine D_1.

Troisième phase : test individuel : les élèves doivent résoudre 2 problèmes du même type, 1 relevant du domaine D_1, l'autre du domaine D_2.

c) Analyse des résultats et des procédures

Première phase : dans un premier temps, les élèves ne reconnaissent pas un problème multiplicatif.

Dans le meilleur des cas, ils effectuent une multiplication et une addition exemple :

$$(\overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{B}}) + (\overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{C}}) \text{ soit } 12 \times 6 + 12 \times 7$$

Il y a très peu de représentations.

Suite à la question intermédiaire posée par la maîtresse lors du premier bilan, la majorité des élèves propose comme résultat $\overline{\overline{A}} \times (\overline{\overline{B}} \times \overline{\overline{C}})$ soit $12 \times (42)$. Cela ne permet toutefois pas aux élèves de prendre pleinement conscience des rôles symétriques joués par les 3 ensembles.

Deuxième phase : comme les variables numériques appartiennent au domaine D_1, les élèves dressent la liste exhaustive de tous les cas possibles. Les résultats proposés sont du type $\overline{\overline{A}} \times (\overline{\overline{B}} \times \overline{\overline{C}})$ ou $(\overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{B}}) \times \overline{\overline{C}}$ ou dans de rares cas $(\overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{B}} \times \overline{\overline{C}})$.

Troisième phase : dans le cas du domaine D_1.

- très peu d'élèves (2 sur 26) produisent comme écriture finale le produit $\overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{B}} \times \overline{\overline{C}}$, significatif d'une «vision» multiplicative du problème. Les autres mènent à l'aide de listes organisées ou à l'aide d'une représentation en arbre une recherche plus ou moins exhaustive ; cela les conduit à dénombrer un à un ou par paquets les éléments du produit.
- il y a un léger progrès par rapport à la deuxième phase.

Dans le cas du domaine D_2, nous constatons un net progrès par rapport à la phase n° 1 dû sans doute à l'apprentissage réalisé et au fait que les élèves ont su reconnaître (pour 17 d'entre eux) un problème multiplicatif.

CONCLUSION

Les représentations (listes ou arbres) semblent être nécessaires dans un premier temps (domaine D_1) mais dans le cas du domaine D_2 elles peuvent être un handicap car elles induisent une recherche exhaustive de tous les cas.

L'apprentissage réalisé sur des petits nombres (domaine D_1) permet aux élèves de reconnaître un type de problèmes et de se construire des techniques de résolution. Toutefois celles-ci doivent déboucher sur un calcul de produits et cela nécessite de la part de l'élève un abandon des techniques de recherche exhaustive. Il y a là un saut conceptuel qui peut être favorisé par un jeu sur les variables didactiques (recours à des nombres plus grands) et par une «épuration» de l'arbre (ne compter que les branches, ne pas l'utiliser pour dresser la liste des triplets).

2. Autres problèmes de combinatoire

Nous avons proposé aux élèves, dans un premier temps, le problème suivant.
(Domaine D_2).
P_1 : 20 équipes de football (dont on donne la liste) de première division participent au championnat, chaque équipe rencontre les autres deux fois (match aller - match retour). Combien y a-t-il de matchs disputés ?

Puis d_2 semaines après les deux problèmes ci-dessous afin de tester le résultat de l'apprentissage effectué précédemment.

(Domaine D_1).
P_2 : 5 personnes se rencontrent et se serrent la main, combien de poignées de mains sont ainsi échangées ?

(Domaine D_2).
P_3 : dans un changement de basket, il y a 25 équipes, chaque équipe rencontre les autres une fois, combien y a-t-il de matchs disputés ?

Ce sont trois problèmes de combinatoire pouvant se résoudre par un calcul de produit. Notre but était de tester les performances, démarches et représentations mises en œuvre par les élèves lors de la résolution, de tester l'effet de l'apprentissage réalisé en P_1 sur P_2 et P_3 et ceci dans le cas où les données intervenant étaient soit «petites» soit plus importantes.

Le principe de l'expérience est le même que celui exposé précédemment. Toutefois, les problèmes P_2 et P_3 sont un peu différents du problème P_1.

a) Etude du problème P_1

Analyse a priori des procédures de résolution possibles
Nous pouvions distinguer plusieurs procédures pour résoudre ce problème.

- **La procédure PRO_1** : chaque équipe rencontrant les autres deux fois, elle dispute donc 19 matchs aller, 19 retour, soit 38 matchs.

Chaque match faisant intervenir 2 équipes, comme il y a 20 équipes il y a donc 380 matchs.

$$38 \times 10 = 380.$$

- **La procédure PRO_2** : chaque équipe fait 19 matchs aller, il y a 20 équipes, cela fait donc 380 matchs (prise en compte de la symétrie du problème).

Ces deux procédures ne font pas intervenir la symétrie du problème au même moment.

- **La procédure PRO_3** : la première équipe dispute 19 matchs aller, la seconde 18, ..., la première (20 - p), la dernière 1 match aller, il y a donc

$$19 + 18 + \ldots + 1 = 160 \text{ matchs aller}$$

il y a de ce fait 380 matchs.

- **La procédure PRO_4** : la première équipe dispute 38 matchs, la seconde 36 matchs, ..., la 20ème 2 matchs, il y a donc

$$38 + 36 + \ldots + 2 = 380 \text{ matchs.}$$

Ces deux dernières procédures ne font pas jouer des rôles identiques aux différentes équipes. Elles sont de plus liées à une recherche exhaustive des solutions, de plus elles sont très proches d'une vision additive du problème alors que les procédures PRO_1 et PRO_2 étaient plus proches d'une vision multiplicative.

Productions et erreurs des élèves

10 élèves sur 26 fournissent une réponse juste correspondant au calcul $20 \times 19 = 380$.

3 élèves fournissent une réponse fausse :

$$19 \times 2 \times 20 = 38 \times 20 = 760$$
$$20 \times 19 = 380 \; ; \; 380 \times 20 = 7\,600$$
$$20 \times 20 = 400$$

Les autres élèves ne finissent pas leurs calculs ou ne répondent pas.

Nous observons 2 types de représentation :
- celles qui font intervenir la symétrie du problème ;
- celles qui ne font pas intervenir la symétrie du problème.

Procédures utilisées

La procédure la plus utilisée est la procédure PRO_2 (11 fois) (vision additive : 19 + 19 + ... + 19).

Les autres procédures PRO_1 et PRO_3 ne sont utilisées qu'une seule fois.

Nous constatons que dans cette première phase, un nombre important d'élèves sont en échec, ceux qui amorcent une recherche sont conduits à dresser une liste exhaustive s'appuyant le plus souvent sur une énumération codée des rencontres qu'ils arrivent en général à généraliser quand ils prennent en compte la symétrie du problème. Cette recherche les amène à passer d'un début d'addition réitérée à un produit.

b) Variante P'_1 : il s'agit du même problème que P_1, mais les données numériques relèvent du domaine D_1.

Dans cette phase, les élèves obtiennent de bons résultats et utilisent le plus souvent les procédures PRO_1 et PRO_2, dans des cas plus rares la procédure PRO_3. Les représentations sont du même type (mais complètes) que ci-dessus.

Analyse du test

a) Variante P_2

18 élèves sur 26 répondent correctement à la question, 3 élèves ne tiennent pas compte de la symétrie du problème, 1 élève fait une erreur de calcul, 2 élèves répondent 5 × 5 = 25 (prise en compte que du facteur 5), 1 élève n'a rien compris au problème. Dans le cas de «petits nombres» il y a donc un fort pourcentage de réussite.

La procédure majoritaire est la procédure PRO_3 correspondant à une recherche exhaustive (15 élèves), les autres n'existent qu'à l'état de trace. Peu d'élèves traduisent le résultat sous la forme d'un produit : il n'y a pas de vision multiplicative du problème (qui demande une prise en compte de la symétrie : 3 élèves seulement).

La représentation majoritaire est l'arbre. On relève quelques dessins figuratifs et quelques diagrammes sagittaux.

b) Variante P_3

Cette passation est nettement plus mal réussie, 1 seul élève trouve le bon résultat par une recherche exhaustive des solutions et par une addition 24 + 23 + 22 + ... + 1 (procédure PRO_3). 8 élèves ne répondent pas, 16 élèves entament une recherche exhaustive et essaient de la traduire par une multiplication (fausse car ils ne prennent pas en compte la symétrie : 24 × 24 ou 25 × 25).

Les représentations reviennent à faire ou entamer une recherche exhaustive (diagrammes sagittaux, listes, arbres ;1 seule élève décompte les branches de l'arbre). Ces recherches souvent prennent en compte la symétrie des rôles joués par les équipes mais ne débouchent pas lors des calculs sur un bon résultat.

Nous pouvons donc conclure que si la recherche exhaustive (s'appuyant sur des représentations) permet de résoudre la variante P_2, celle-ci induit une structure additive qui conduit à l'échec les mêmes élèves quand les nombres sont plus grands (variante P_3) car il faut alors abandonner cette recherche, et la généraliser en la traduisant par un produit ou une addition des n premiers nombres entiers.

La recherche effectuée sur des petits nombres n'apporte pas ici de résultats significatifs les résultats enregistrés à ce test étant plus faibles que ceux enregistrés à la phase n° 1 (variante P_1), cela nous conduit à penser que ces notions sont très instables chez les élèves de CM_2.

CONCLUSION - QUELQUES PISTES DE TRAVAIL

Notre but n'est pas, ici, de reprendre en détail les conclusions des différentes parties. Rappelons seulement quelques points.

Le travail effectué en calcul mental montre que

1. Les décompositions multiplicatives ne sont pas disponibles chez les élèves de CM_2, qui se ramènent, pour le calcul de produits, à des décompositions additives. Elles doivent faire l'objet d'un apprentissage spécifique. Notons à ce sujet que le calcul mental n'est pas toujours le meilleur moyen pour travailler sur ce thème. En effet, dans bien des cas, le recours à l'addition (notamment à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition) est performant pour obtenir le résultat. Toutefois dans certains calculs (32×25 par exemple), le recours à des décompositions multiplicatives peut se justifier. Il semble en être de même quand interviennent des nombres décimaux ou rationnels. (Nous n'avons pu, au cours de cette expérimentation, tester ce point).

2. Il semble se confirmer que l'organisation en mémoire des nombres sous forme multiplicative n'est pas acquise à cet âge. Du moins le recours à cette organisation nécessite une surcharge de travail, pour les élèves.

3. La taille des nombres semble être une variable didactique pertinente pour faire évoluer les procédures de calcul des élèves.

Sur tous ces points, il serait nécessaire de tester des élèves du premier cycle de l'enseignement secondaire, il serait notamment intéressant de mesurer l'impact des activités de calcul mental de produits sur le calcul algébrique. Sur ce dernier point, il nous semble indispensable de préparer, dès l'école élémentaire, les élèves à ces calculs, le calcul mental nous semble être là un bon moyen pour remplir cet objectif.

Le travail effectué sur les problèmes multiplicatifs montre que

1. Le produit cartésien, s'il fonctionne de façon implicite dans le cas de 2 ensembles ayant des cardinaux «petits», n'est plus aussi aisément opératoire dans des cas plus complexes.

2. Les élèves de CM_2 ne sont capables de résoudre des problèmes de combinatoire que par une recherche exhaustive des différents cas possibles. Celle-ci

devient vite caduque lorsque le problème fait intervenir des données numériques plus importantes.

3. Les élèves de CM_2 ont encore une «vision additive» des problèmes multiplicatifs, celle-ci semble renforcée par les représentations qui ont été construites lors de l'étude de problèmes de dénombrement.

4. Le passage de petits nombres à de grands nombres ne permet pas, seul, de faire évoluer les procédures et représentations des élèves.

Finalement ces deux recherches montrent que les élèves CM_2 maîtrisent mal les structures multiplicatives. Cela rejoint les résultats des travaux de G. Vergnaud. Il nous semble urgent de porter une attention particulière sur ce point à l'école élémentaire. En effet, l'enseignement actuel est trop axé sur les structures additives ou sur l'apprentissage des algorithmes opératoires.

Un travail spécifique sur le sens de la multiplication nous semble indispensable ; cette étude doit être poursuivie dans le 1er cycle.

BIBLIOGRAPHIE

M. FAYOL, (1985), Nombre - Numération et dénombrement - Que sait-on de leur acquisition ? *Revue française de pédagogie n° 70.*

ERMEL CE et CM, *Apprentissages mathématiques à l'Ecole Elémentaire.*

D. BUTLEN, C. LETHIELLEUX, M. P. PEZARD, (1989), Calcul mental, Calcul rapide. *Brochure n° 78, IREM Paris sud.*

M.J. PERRIN-GLORIAN, Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM_2 et du collège. *Cahier de didactique des mathématiques n° 24.*

J.F. RICHARD, (1982), Mémoire et résolution de problèmes. *Revue française de pédagogie n° 60.*

S. MAURY, M. FAYOL, (1986), Combinatoire et résolution de problèmes aux cours moyens première et deuxième année. *Recherche en Didactique des Mathématiques Vol. 7.1, pp. 63-104,* La Pensée sauvage - Grenoble.

J. ROGALSKI, A propos de l'acquisition de la bidimensionnalité chez les élèves d'âge préscolaire et scolaire. Enseignement et acquisition de la bidimensionnalité. *Cahier de didactique des mathématiques n° 12 et 13.*

M. DENIS, (1982), Représentation imagée et résolution de problèmes. *Revue française de pédagogie n° 60.*

D. BUTLEN, C. LETHIELLEUX, M. PEZARD, Calcul mental, calcul rapide : une analyse didactique de quelques situations du CP au CM_2. *Brochure n° 8 IREM.*

IREM de Grenoble, (1979), (1980), Quel est l'âge du capitaine ? *Revue Grand N n° 19, pp. 63-70,* puis*Bulletin APMEP n° 323, pp. 235-243.*

D. BUTLEN, Apport de l'ordinateur à l'apprentissage des écritures multiplicatives au CE. *Thèse de troisième cycle, IREM de Paris sud.*